Universidad Mayor de San Simón
Facultad de Ciencias y Tecnología **Departamento de Matemáticas**

Cálculo III
Ecuaciones Diferenciales

Hans C. Müller Santa Cruz

Cochabamba, 1998.

Contenido

	Prefacio	iii
I.-	**Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**	1
	1.- Vocabulario Básico	1
	2.- Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden	4
	3.- Problemas de Existencia y Unicidad	13
	4.- Ecuaciones de Orden Superior	20
	5.- Ejercicios	33
II.-	**Sistemas Diferenciales y Aplicaciones**	39
	1.- Conceptos Básicos	39
	2.- Aplicaciones	44
	3.- Sistemas Diferenciales Lineales	51
	4.- Estabilidad y Estudio de Puntos Críticos	60
	5.- Ejercicios	66
III.-	**Complementos**	71
	1.- Ecuaciones Diferenciales Exactas	71
	2.- Ecuaciones a Derivadas Parciales	77
	3.- Elementos de Cálculo Variacional	82
	4.- Ejercicios	98
	5.- Teorema de Hamilton Cayley	103
	6.- Endomorfismos Nilpotentes	105
	7.- Descomposición de Jordan	112

Prefacio

El contenido de la asignatura de Cálculo III que se imparte en la Facultad de Ciencias y Tecnología de la Universidad Mayor de San Simón, está orientado al estudio y solución de problemas diferenciales. La importancia de esta materia radica en el hecho en que las ecuaciones diferenciales constituyen un lenguaje natural para describir la mayor parte de los fenómenos, asimismo constituye un medio para predecir comportamientos de los diferentes procesos que deberá analizar el estudiante en su desempeño profesional ulterior.

El presente texto es el resultado del curso de Cálculo III impartido durante varios semestres a los estudiantes de la Carrera de Ingeniería Civil y las Carreras de Física, como también en su momento la Carrera de Matemáticas. Contemplando el cumplimiento de los objetivos generales y especificos de la asignatura, el texto cuenta con tres capítulos.

El primer capítulo presenta las ecuacioenes diferenciales ordinarias, dando el vocabulario básico y las técnicas elementales de solución para las ecuaciones diferenciales mas usuales.

El segundo capítulo pretende mostrar que las ecuaciones diferenciales constituyen una herramienta poderosa para resolver otro tipos de problemas, que no son diferenciales propiamente. Asimismo se introduce el estudio de los sistemas diferenciales bajo una óptica moderna orientada a la implementación de métodos numéricos.

El tercer capítulo es un complemento del curso donde se abordan temas a un nivel introductorio.

Para un buen asimilación de los conocimientos y razonamientos de este texto; las definiciones y conceptos más significativos están escritos en **negrillas**, estos deberán ser memorizados y manipulados fluidamente. Los resultados mas importantes están expresados en los *teoremas, corolarios y proposiciones*, estos deberán también ser memorizados para manejarlos de manera fluida. Las demostraciones de este texto deberán ser trabajadas, con la finalidad de adquirir las diferentes técnicas de demostración y resolución de problemas que se emplean en Ecuaciones Diferenciales. Con fines pedágogicos, en algunos paragrafos se presentan los resultados fundamentales que serán tratados en el paragrafo en cuestión, estos están escritos en carácteres *itálicos*.

La práctica del curso, es una fuente para practicar los conocimientos adquiridos y así mismo como un medio de adquirir conocimientos adicionales. Por lo tanto, una resolución en gran número de estos ejercicios, podrá medir el grado de asimilación del estudiante.

Capítulo I

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

En este primer capítulo, se estudiará las ecuaciones diferenciales usuales que uno encuentra en la mayoría de los problemas, donde intervienen ecuaciones diferenciales. Para tal efecto, se describirá el vocabulario básico, los métodos de solución de las ecuaciones más utilizadas y algunos métodos para aproximar soluciones de algunos problemas diferenciales.

I.1 Vocabulario Básico

Para definir lo que es una ecuación diferencial, introduzcamos la siguiente notación para representar las derivadas (parciales) de una función. Sea $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, consideremos el conjunto de

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad \text{con}\alpha_k \geq 0 \text{ y } \alpha_k \in \mathbb{Z}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Definimos

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x),$$

donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

Remarcas

1.- Si $n = 1$, convenimos que $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \geq 0$ y

$$D^\alpha f(x) = f^{(\alpha)}(x),$$

la derivada (ordinaria) de orden α de f.

2.- El entero $|\alpha|$ es el orden de la derivada (parcial) de f.

Ejemplo

1.- Si $n = 2$ y $\alpha_1 = n$ y $\alpha_2 = m$, se tiene

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{n+m} f}{\partial x_1^n \partial x_2^m}(x).$$

Definición I.1.1.- Una **ecuación diferencial** es una ecuación donde aparecen una función incognita y y algunas de sus derivadas; es decir, es una expresión

$$F(x, y, D^\alpha y, D^\beta y, \ldots, D^\gamma y) = 0 \tag{I.1.1}$$

donde F es una función continua conocida, $x \in \mathbb{R}^n$, $y(x)$ la función incognita.

Ejemplo

2.- Para $n = 1$, la ecuación $y' = f(x)$, donde $f(x)$ es una función conocida es una ecuación diferencial; que por cierto, ya resuelta en Cálculo I. La solución se la conoce con el nombre de **primitiva** o **integral indefinida**. Por consiguiente,

$$y(x) = \int f(x)\,dx.$$

El estudio de las ecuaciones diferenciales pasa por lo tanto, por:

1.- Encontrar una o todas las y con esta propiedad. Es decir, busqueda de una "primitiva".

2.- ¿Existe soluciones?

3.- ¿Se las puede explicitar?

Definición I.1.2.- Si la función incognita y es función de una sola variable, $n = 1$, la ecuacion diferencial es una ecuacion diferencial **ordinaria**. Si y es función de varias variables, $n > 1$, la ecuación diferencial es una ecuación diferencial **a derivadas parciales**.

En lo que sigue este capítulo, solo trataremos ecuaciones diferenciales ordinarias, de donde convenimos que por ecuación diferencial entenderemos ecuación diferencial ordinaria.

El Orden de una ecuación diferencial

Definición I.1.3.- El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de derivación más alto de la función incognita que aparece en la ecuación diferencial.

Ejemplos

3.- Las ecuaciones algebraicas $f(x, y) = 0$ son ecuaciones diferenciales de orden 0.

4.- $y'' + y = 0$, es de orden 2.

5.- $(y')^3 = y^2$ es de orden 1 o primer orden.

6.- $y'' + y'y = 1$ es de orden 2.

Definición I.1.4.- Una ecuación **explícita** de orden n, es una ecuación diferencial de orden n de la forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{I.1.2}$$

donde f es una función continua.

Soluciones de una Ecuación Diferencial Ordinaria

Consideramos la ecuación diferencial (ordinaria y explícita)

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{I.1.2}$$

donde $f : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ es continua.

Una **solución** o **solución particular** de esta ecuación diferencial es una función $\varphi : I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, n veces derivable, tal que

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in A, \ \forall x \in I.$$

La **solución general** de una ecuación diferencial es el conjunto de sus soluciones particulares.

Remarcas

1.- Si bien, la solución general de una ecuación diferencial es un conjunto de funciones, es costumbre denotar la solución general bajo la forma de una función que depende de un parámetro o constante.

2.- La ecuación diferencial puede ser dada en forma explícita, sin que se pueda hacer lo mismo para sus soluciones. Por ejemplo

$$y' = \frac{-2(y+2)^2}{((y+2)-(x-1))^2},$$

cuyas soluciones están dadas por

$$\ln(y+2) = 2\arctan\frac{y+2}{x-1} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

y no puede ser expresado como composición de funciones elementales; es decir, las funciones estudiadas en Cálculo I.

Problemas Diferenciales

En general, las ecuaciones diferenciales están ligadas a ciertas condiciones impuestas en el planteo del modelo matemático que describirá el fenómeno o la acción analizada. Para ilustrar, la necesidad de contar con ciertas condiciones adicionales a la ecuación diferencial, consideremos como ejemplo la caída libre de un objeto. Supongamos que la gravedad es la única fuerza que interviene sobre el objeto, despreciando otras fuerzas. Por consiguiente, el movimiento del objeto verifica

$$a = -g,$$

donde a es la aceleración y g es la constante de gravedad sobre la superficie de la Tierra. Traducido en forma de ecuación diferencial, se tiene

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$

de donde, por dos integraciones sucesivas, obtenemos

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + ct + d, \tag{I.1.3}$$

con $c, d \in \mathbb{R}$ constantes.

Ahora bien, (I.1.3) no describe el movimiento del objeto en cuestión; es decir, con solamente la ecuación diferencial no podemos saber la posición del objeto en cualquier instante. Requerimos información adicional, aparte de la ecuación diferencial. En el curso de Física I, este problema fue tratado cuando se conocía, la posición inicial y la velocidad inicial del objeto. Este es un ejemplo de un:

Definición I.1.5.- Un problema diferencial **a valor inicial** o problema diferencial de **Cauchy** es darse una ecuación diferencial de orden n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

y los valores iniciales $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$; buscando una solución φ de la ecuación diferencial propuesta, tal que

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= y_0, \\ \varphi'(x_0) &= y_1, \\ &\vdots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}. \end{aligned}$$

Remarca.- Los problemas diferenciales a valores iniciales son muy importantes, pues una vasta cantidad de problemas en mécanica, química y otras ciencias son problemas a valores iniciales. Por otro lado, en Análisis Numérico, los métodos de solución de ecuaciones diferenciales comtemplan este tipo de problema. Por lo tanto, es importante responder a: ¿Dada una ecuación diferencial, se puede resolver un problema de Cauchy para esta ecuación?, ¿la solución de este problema de Cauchy es única?

Los problemas diferenciales a valor inicial no son los únicos problemas diferenciales, existen problemas diferenciales más generales, conocidos como problemas diferenciales con valores en la frontera o valoresn en los bordes. Como ilustración estudiemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo

7.- Consideremos una viga de longitud L en posición horizontal, sometida a una carga vertical $q(x)$. Por efecto de esta carga, la viga sufre una deformación transversal $u(x)$. Suponiendo la deformación pequeña, $u(x)$ es solución de la ecuación diferencial

$$u^{(4)}(x) = q(x).$$

Ahora bien, dependiendo lo que sucede en las extremidades de la viga, se tiene diferentes problemas diferenciales con condiciones en los bordes. En la figura I.1, se tiene las tres variantes más usuales.

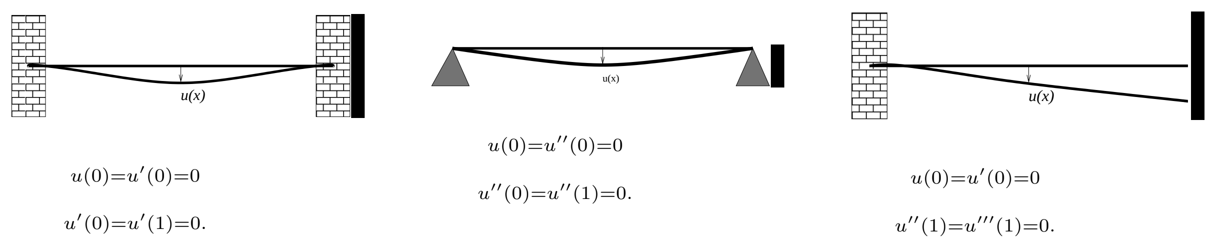


Figura I.1.- Problemas Diferenciales de Vigas

I.2 Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Estudiaremos los métodos de resolución de las ecuaciones de primer orden bajo la forma explícita, más usuales.

Ecuaciones Lineales

Definición I.2.1.- Una ecuación diferencial de primer orden **lineal** es una ecuación del tipo

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{L}$$

donde $a, b : I \to \mathbb{R}$ continua e $I \subset \mathbb{R}$ intervalo.

Convención.- Para no rescribir cada vez, utilizaremos (L) para referirnos a una ecuación diferencial lineal (de primer orden).

Definición I.2.2.- Se dira que una ecuación diferencial lineal de primer orden es homogénea, si $b(x) = 0$ $\forall x \in I$ en (L). Es decir

$$y' = a(x)y. \tag{LH}$$

Solución de una ecuación lineal homogénea

Teorema I.2.3.- *La solución general de la ecuación lineal homogénea de primer orden*

$$y' = a(x)y, \tag{LH}$$

con $a : I \to \mathbb{R}$ es continua, está dada por

$$y(x) = Ce^{A(x)} \tag{I.2.1}$$

donde $A(x)$ es una primitiva de a; es decir, $A'(x) = a(x)$.

Demostración.- Primero mostremos que, toda función de la forma $Ce^{A(x)}$ es solución; en efecto, derivando obtenemos

$$\left(Ce^{A(x)}\right)' = C\left(e^{A(x)}\right)' = Ce^{A(x)}A'(x) = Ce^{A(x)}a(x) = a(x)\left(Ce^{A(x)}\right).$$

Ahora mostremos que toda solución $\varphi(x)$ de (LH) es de la forma $Ce^{A(x)}$, donde A es una primitiva de a. En efecto, si φ es solución, consideremos

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{e^{A(x)}},$$

derivemos ψ, lo cual conduce a

$$\psi'(x) = \frac{\varphi'(x)e^{A(x)} - \varphi(x)(e^{A(x)})'}{(e^{A(x)})^2} = \frac{a(x)\varphi(x)e^{A(x)} - \varphi(x)e^{A(x)}A'(x)}{(e^{A(x)})^2} = 0.$$

Como $\psi'(x) = 0$ para todo $x \in I$, se deduce que $\psi(x) = C$.

□

Remarcas

1.- La hipótesis del teorema precedente que $a(x)$ es continua, asegura la existencia de una primitiva $A(x)$. En efecto, el primer teorema fundamental del cálculo lo asegura.

2.- Por el primer teorema fundamental del cálculo, la existencia de $A(x)$ está asegurada, lo que no significa que $A(x)$ pueda expresarse como la composición de funciones elementales. Por ejemplo,

$$A(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt$$

es primitiva de e^{x^2}, pero es imposible expresar $A(x)$ como la composición de funciones elementales.

Corolario I.2.4.- *Las soluciones particulares de una ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea de primer orden forman un espacio vectorial real de dimensión* 1.

Demostración.- En el curso de Algebra Lineal, se vio que el conjunto de las funciones $f : I \to \mathbb{R}$, denotado por $I^{\mathbb{R}}$ es un espacio vectorial para:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x), \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Para mostrar que la solución general de (LH) es un subespacio vectorial, se debe verificar que existe al menos una solución de (LH), lo que es cierto porque $\varphi(x) = 0$, $\forall x \in I$ es solución. Luego, dadas dos soluciones φ y ψ de (LH), entonces cualquier combinación lineal de las dos soluciones es solución de (LH); es decir

$$\varphi,\ \psi \text{ soluciones} \Rightarrow \alpha\varphi + \beta\psi \text{ solución},\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} (\alpha\varphi + \beta\psi)'(x) &= \alpha\varphi'(x) + \beta\psi'(x) \\ &= \alpha(a(x)\varphi(x)) + \beta(a(x)\psi(x)) \\ &= a(x)(\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)) = a(x)(\alpha\varphi + \beta\psi(x)). \end{aligned}$$

Por el teorema precedente $e^{A(x)}$ genera la solución general o subespacio vectorial de soluciones particulares de (LH), lo que muestra que la dimensión es 1.

□

Corolario I.2.5.- *Un problema de Cauchy, para una ecuación lineal de primer orden homogénea,* $y = a(x)y$ *y* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, *admite siempre una solución única.*

Demostración.- Mostraremos que el problema diferencial

$$\begin{aligned} y' &= a(x)y, \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

tiene solución única. En efecto, sea $A(x)$ una primitiva de $a(x)$. (I.2.1) indica que toda solución de (LH) es de la forma

$$y(x) = Ce^{A(x)}.$$

En particular, para el problema a valor inicial se tiene

$$y_0 = Ce^{A(x_0)},$$

obteniendo de manera única

$$C = \frac{y_0}{e^{A(x_0)}}.$$

□

Ejemplos

1.- La solución general de $y' = \cos(x)y$, es

$$y(x) = Ce^{\sin x},$$

porque $\sin' x = \cos x$.

2.- La solución general de $y' = ay$, con $a \in \mathbb{R}$, es

$$y(x) = Ce^{ax}.$$

3.- La solución del problema $y' = a(x)y$, $y(x_0) = 0$; es

$$y(x) = 0.$$

Solución de una ecuación lineal (no homogénea)

Consideremos la ecuación lineal de primer orden

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{L}$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas definidas sobre un intervalo I. Como ya hemos visto el caso (LH), supongamos que $b(x)$ no es identicamente nula. A la ecuación (L), le asociamos

$$y' = a(x)y. \tag{LH}$$

Proposición I.2.6.- *Sea ψ una solución particular de (L) y φ cualquier solución de (LH), entonces*

$$\psi + \varphi$$

es una solución de (L).

Demostración.- En efecto

$$\begin{aligned}(\varphi + \psi)'(x) &= \varphi'(x) + \psi'(x)\\ &= a(x)\varphi(x) + (a(x)\psi(x) + b(x))\\ &= a(x)(\varphi + \psi)(x) + b(x).\end{aligned}$$

□

Proposición I.2.7.- *Sea ψ una solución particular de (L), entonces cualquier solución de (L) es de la forma*

$$\psi + \varphi,$$

donde φ es solución de (LH).

Demostración.- Sea ϕ una solución de (L), suficiente ver que $\psi - \phi$ es solución de (LH). En efecto

$$\begin{aligned}(\psi-\phi)'(x) &= \psi'(x) - \phi'(x)\\ &= (a(x)\psi(x)+b(x)) - (a(x)\phi(x)+b(x))\\ &= a(x)(\psi(x)-\phi(x)).\end{aligned}$$

□

Por lo tanto, para conocer la solución general de (L), es suficiente conocer una solución particular de (L) y la solución general de (LH), algo que ya sabemos hacer. Este resultado lo expresamos, mediante la siguiente regla memotécnica.

$$\boxed{\text{Solución general de (L)}} = \boxed{\text{Solución general de (LH)}} + \boxed{\text{Una solución particular de (L)}}$$

Proposición I.2.8.- *El problema a valor inicial*

$$\begin{aligned}y' &= a(x)y + b(x),\\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

tiene solución única.

Demostración.- Ejercicio.

Determinación de una solución particular de (L)

La determinación de la solución general de una ecuación linea de primer orden pasa: por la determinación de la solución general de la ecuación lineal homogenea asociada a la ecuación en cuesti'on (algo que ya sabemos hacer) y por la determinación de una solución particular.

Ahora bien, podemos determinar una solución particular mediante:

i.- **Al tanteo.** Este procedimiento es producto de la experiencia y la genialidad de la persona que lo utiliza; sin embargo, en algunos casos se puede encontrar la solución, sobre todo, cuando $b(x)$ la parte no homogénea de (L) es un polinomio, una función sin o cos y cuando es exponencial.

Ejemplos

4.- Consideremos la ecuación $y' = y + x^2$. En este ejemplo $b(x) = x^2$ y planteamos como solución particular $y(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ un polinomio del mismo grado que $b(x)$. Remplazando en la ecuación obtenemos

$$\beta + 2\gamma x = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + x^2,$$

de donde, planteando las respectivas ecuaciones, obtenemos $\gamma = -1$, $\beta = -2$ y $\alpha = -2$. Por lo tanto

$$y(x) = -2 - 2x - x^2$$

es la solución particular buscada.

5.- Consideremos la ecuación $y' = y + \cos 2x$. Podemos intentar con una solución de la forma $y(x) = \alpha\cos 2x + \beta\sin 2x$. Remplazando obtenemos

$$-2\alpha\sin 2x + 2\beta\cos 2x = \alpha\cos 2x + \beta\sin 2x + \cos 2x,$$

resolviendo las ecuaciones algebraicas que se deducen, se obtiene

$$y(x) = -\frac{1}{5}\cos 2x + \frac{2}{5}\sin 2x$$

como solución particular.

6.- Consideremos la ecuación $y' = 2y + e^x$, la solución particular que estamos buscando, puede ser de la forma $y(x) = \alpha e^x$. Remplazando obtenemos

$$\alpha e^x = 2\alpha e^x + e^x,$$

de donde $\alpha = -1$ y la solución particular es

$$y(x) = -e^x.$$

ii) **Variación de Constantes.** Cuando no es posible adivinar las soluciones particulares, se tiene el método de variación de constantes. Sabiendo que la solución general de (LH) es $y(x) = Ce^{A(x)}$, donde $A(x)$ es una primitiva de $a(x)$, la idea del método es plantear como solución particular de (L)

$$y(x) = c(x)e^{A(x)} \tag{I.2.2}$$

donde $c(x)$ depende de x. Remplazando en la ecuación (L), se obtiene

$$c'(x)e^{A(x)} + c(x)e^{A(x)}a(x) = a(x)c(x)e^{A(x)} + b(x),$$

de donde

$$c'(x) = b(x)e^{-A(x)}. \tag{I.2.3}$$

$c(x)$ se obtiene de $c'(x)$ por integración.

Ejemplo

7.- Consideremos la ecuación diferencial

$$y' = y + e^x,$$

la solución general de la ecuación lineal homogénea asociada es

$$y(x) = Ce^x.$$

Planteando la solución particular buscada como $y(x) = c(x)e^x$, variación de constantes da

$$c'(x) = e^x e^{-x} = 1,$$

de donde $c(x) = x$ y la solución particular será $y(x) = xe^x$. La solución general

$$y(x) = Ce^x + xe^x.$$

Remarca Variación de constantes es un método que nunca falla,

Ecuaciones de Tipo Bernouilli

Son ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha \tag{B}$$

con $a \neq 0$ y a, b funciones continuas.

Remarcas

1.- La expresión y^α, con $\alpha \in \mathbb{R}$, está definida por

$$y^\alpha = e^{\alpha \ln y}, \tag{I.2.4}$$

por consiguiente, tendrá sentido cuando $y > 0$. Cuando α es entero o racional y^α puede tener un dominio de definición mayor, por lo que debe tratarse de acuerdo al caso.

2.- En la ecuación de tipo Bernouilli, deberá suponerse $b(x)$ es no identicamente nulas, porque sino estaríamos en el caso de las ecuaciones lineales de primer orden ya vistas.

3.- En la ecuación de tipo Bernouilli, deberá también suponerse que $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$, caso contrario estaríamos en el caso linal ya visto.

Con las remarcas hechas, supongamos que $\psi(x)$ es una solución de (B), planteamos

$$\varphi(x) = (\psi(x))^{1-\alpha}. \tag{I.2.5}$$

Derivando φ, se obtiene

$$\varphi'(x) = (1-\alpha)(\psi(x))^{-\alpha}\psi'(x).$$

Como ψ es solución de (B), se tiene

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= (1-\alpha)(\psi(x))^{-\alpha}(a(x)\psi(x) + b(x)(\psi(x))^{\alpha})\\ &= (1-\alpha)a(x)(\psi(x))^{1-\alpha} + (1-\alpha)b(x)\\ &= (1-\alpha)a(x)\varphi(x) + (1-\alpha)b(x).\end{aligned}$$

Hemos mostrado el:

Teorema I.2.9.- *Sean φ y ψ dos funciones, si*

$$\varphi(x) = (\psi(x))^{1-\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0, 1;$$

entonces ψ es solución de la ecuación de tipo Bernouilli

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}, \tag{B}$$

con a, b continuas y no identicamente nulas, si y solamente si φ es solución de la ecuación lineal de primer orden

$$z' = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x). \tag{L}$$

Regla Memotécnica.- Cada vez que se encuentre una ecuación de tipo Bernouilli, introducir la variable $z = y^{1-\alpha}$.

Ejemplo

8.- Determinemos la solución general de la ecuación diferencial

$$y' = y + y^2.$$

Planteamos $z = y^{1-2} = 1/y$, de donde $zy = 1$. Derivando, so obtiene $z'y + y'z$, multiplicando la ecuación por z, se tiene

$$zy' = zy + zy^2,$$

remplazando, se obtiene

$$-z'y = 1 + y,$$

dividiendo por y, obtenemos la ecuación lineal para z

$$z' = -z - 1,$$

la solución general para esta última ecuación es

$$z(x) = Ce^{-x} - 1,$$

y por consiguiente la solución general para la ecuación de Bernouilli es

$$y(x) = \frac{1}{Ce^{-x} + 1},$$

teniendo cuidado que el denominador no se anule.

Corolario I.2.10.- *Un problema diferencial a valor inicial para una ecuación de tipo Bernouilli*

$$\begin{aligned} y' &= a(x)y + b(x)y^{\alpha}, \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

tiene solución única, si esta existe.

Demostración.- Ejercicio.

Ecuaciones Separables

Las ecuaciones diferenciales separables, son ecuaciones diferenciales de primer orden, que pueden escribirse como

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}, \tag{S}$$

con f y g funciones continuas y $g(y) \neq 0$.

Antes de determinar y estudiar las soluciones de la ecuación (S), analizemos f y sobre todo g. Como f y g son funciones continuas, por el primer teorema fundamental del Cálculo Integral, ambas admiten primitivas, que las denotamos por $F(x)$ y $G(y)$ respectivamente. Por la definición de primitiva, se tiene

$$F'(x) = f(x), \quad G'(y) = g(y).$$

Por otro lado, como g es continua y por hipótesis $g(y) \neq 0$, se tiene, sea $g(y) > 0$, o sea $g(y) < 0$. Por consiguiente, si $g(y) > 0$, se tiene que $G(y)$ es estrictamente creciente, y por lo tanto $G(y)$ es inyectiva y continua. En el otro caso, si $g(y) < 0$, se tiene que $G(y)$ es estrictamente decreciente, y por lo tanto $G(y)$ es inyectiva y continua.

Ahora bien, una función que es continua e inyectiva, admite una inversa que es continua; en nuestro análisis la inversa de G, la denotaremos por G^{-1}, de donde

$$G^{-1}(G(y)) = y, \quad \forall y.$$

Supongamos que $\varphi(x)$ sea una solución de (S), se tiene por consiguiente

$$g(\varphi(x))\varphi'(x) = f(x),$$

con $g(\varphi(x)) \neq 0$. La regla de la cadena, da

$$(G(\varphi(x))' = (F(x))',$$

de donde

$$\begin{aligned} G(\varphi(x)) &= F(x) + C \\ \varphi(x) &= G^{-1}(F(x) + C). \end{aligned}$$

Acabamos de mostrar el:

Teorema I.2.11.- *Sea la ecuación de primer orden separable*

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}, \tag{S}$$

con f, g continuas y $g(y) \neq 0$ para todo y; entonces la solución general de (S) está dada por

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C), \tag{I.2.6}$$

donde F y G son primitivas de f y g respectivamente y G^{-1} denota la función inversa de G.

Regla Memotécnica.- Cuando se tiene que resolver una ecuación separable colocar en un lado de la ecuación todo lo que depende de y e y', en el otro lado lo que depende de x. Luego integrar.

Ejemplo

9.- Resolvamos la ecuación

$$y' = x(1+y^2).$$

Esta ecuación es separable y tenemos

$$\frac{y'}{1+y^2} = x,$$

integrando, se obtiene

$$\arctan y = \frac{1}{2}x^2 + C,$$
$$y = \tan(\frac{1}{2}x^2 + C).$$

Corolario I.2.12.- *Un problema diferencial de Cauchy para una ecuación diferencial de tipo separable, con las misma hipótesis del teorema precedente, admite una sola solución.*

Demostración.- Ejercicio.

Remarcas

1.- Es posible en las ecuaciones separables (S), debilitar la hipótesis sobre $g(y) \neq 0$. El procedimiento de resolución será el mismo, pero puede suceder que la solución que se encuentre no contemple toda la solución general de la ecuación en cuestión, ni tampoco que los problemas a valores iniciales tengan solución única. Este aspecto lo veremos en la siguiente sección.

2.- En general, la función G^{-1} no puede ser expresada como la composición de funciones elementales, por lo que resulta más conveniente expresar la solución general implícitamente; es decir, dejar la solución general como

$$G(y) = F(x) + C.$$

Ecuaciones de tipo Homogéneo

A no confundir con las ecuaciones lineales homogéneas. Una ecuación diferencial de tipo homogénea, es una ecuación diferencial de primer orden que puede escribirse como

$$y' = f(\frac{y}{x}), \tag{H}$$

donde f es una función continua y $x \neq 0$.

Para resolver este tipo de ecuaciones, la substitución que salta a la vista consiste en plantear

$$z = \frac{y}{x}.$$

De donde $zx = y$ y derivando obtenemos

$$y' = z'x + z = f(z).$$

Hemos obtenido por consiguiente una nueva ecuación diferencial dada por

$$z' = \frac{f(z) - z}{x},$$

que es una ecuación de tipo separable.

Ejemplo

10.- Resolvamos la ecuación diferencial

$$y' = \frac{-2y^2}{y^2 + x^2}.$$

Esta ecuación es de tipo homogéneo, si la escribimos de la manera siguiente

$$y' = \frac{-2(y/x)^2}{1 + (y/x)^2},$$

planteando $z = y/x$, obtenemos la ecuación diferencial separable

$$\begin{aligned} xz' = \frac{-2z^2}{1+z^2} - z = -z\frac{1+2z+z^2}{1+z^2} \\ = -\frac{z(z+1)^2}{1+z^2}, \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1+z^2}{z(1+z)^2} z' = -\frac{1}{x},$$

descomponiendo en fracciones simples o parciales obtenemos

$$\left(\frac{1}{z} - \frac{2}{(z+1)^2}\right) z' = -\frac{1}{x},$$

integrando, se tiene

$$\ln z + \frac{2}{1+z} = -\ln x + C.$$

Remplazamos $z = y/x$ y efectuamos operaciones algebraicas, obteniendo

$$\ln y - \ln x + 2\frac{x}{y+x} = -\ln x + C,$$

de donde la solución general, está dada por

$$\ln y + 2\frac{x}{y+x} = C.$$

Otras Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Una forma de resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, consiste en excluir los diferentes tipos de ecuaciones; más precisamente lo que se hace es:

i) Verificar si es una ecuación diferencial lineal, si lo es resolverla, sino.
ii) Verificar si es una ecuación diferencial de tipo Bernouilli, si lo es resolverla, sino.
iii) Verificar si es una ecuación separable, si lo es resolverla, sino.
iv) Verificar si es una ecuación de tipo homogéneo, si lo es resolverla.

Cuando se han excluido los cuatro casos anteriores, lo que se podría hacer es: intentar una substitución o cambio de variable que sea lo suficientemente evidente para que la nueva ecuación sea más simple. La elección de la substitución correcta es fruto de la experiencia, la madurés y la genialidad de la persona que está resolviendo. Esto se consigue con la práctica.

En el caso en que no se pudiese encontrar una substitución o cambio de variable que permita resolver la ecuación se puede intentar aproximar la solución mediante algún método numérico. Los rudimentos los veremos en la siguiente sección.

A manera de ilustración consideremos los siguientes ejemplos.

Ejemplos

11.- La ecuación diferencial

$$y' = \sin(x + y)$$

no pertenece a ninguno de los tipos de ecuaciones estudiadas más arriba, sin embargo, la substitución que se ve facilmente es

$$z = x + y,$$

con lo que la ecuación diferencial se convierte en

$$z' = \sin z + 1$$

que es una ecuación de tipo separable.

12.- En general las ecuaciones que se escriben bajo la forma

$$y' = f(ax + by + c),$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a, b \neq 0$, con la substitución $z = ax + by + c$, se convierte en una ecuación de tipo separable. ¿Cual es la nueva ecuación?

13.- Ecuaciones diferenciales de primer orden, de la forma

$$y' = f\left(\frac{ax + by + r}{cx + dy + s}\right),$$

con $ad - bc \neq 0$ y $(r, s) \neq 0$. Este tipo de ecuaciones pueden convertirse en ecuaciones de tipo homogéneo, mediante las substituciones

$$\begin{aligned} u &= x - x_0 \\ v &= y - y_0 \end{aligned}$$

donde (x_0, y_0) es la intersección de las rectas:

$$\begin{aligned} ax + by + r &= 0 \\ cx + dy + s &= 0. \end{aligned}$$

Ejercicio.- Determinar la ecuación de tipo homogéneo que resulta de estas substituciones.

I.3 Problemas de Existencia y Unicidad

La resolución de ecuaciones diferenciales no tienen mayor utilidad, si no van acompañadas con la solución de un problema diferencial. En esta sección veremos la importancia de las condiciones o hipótesis que van con los problemas diferenciales para evitar de cometer errores absurdos.

Comenzemos ilustrando con el siguiente ejemplo, consideremos el problema diferencial a valor inicial

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt[3]{y^2} \\ y(a) &= 0, \end{aligned} \tag{I.3.1}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Para hacer un uso más eficiente de exponentes, escribamos $y^{2/3}$ en lugar de $\sqrt[3]{y^2}$.

Recordemos en la sección precedente, con las hipótesis dadas para cada problema diferencial a valor inicial, la solución era única. Para el problema planteado deberiamos esperar que la solución también sea única.

Resolvamos $(I.3.1)$, la clasificación de ecuaciones diferenciales, nos muestra de manera evidente, que ésta es una ecuación de tipo separable, la resolvemos ingenuamente, sin fijarnos en las hipótesis que debe cumplir dicha ecuación. Se tiene por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y^{2/3}} &= 1,\\ 3y^{1/3} &= x + C,\\ y &= \frac{1}{27}(x+C)^3;\end{aligned}$$

ahora introduzcamos la condición inicial, lo que da $C = -a$, por lo que la solución encontrada es

$$y(x) = \frac{1}{27}(x-a)^3. \tag{I.3.2}$$

La gráfica de esta solución puede apreciarse en la figura I.2.

Por otro lado, si no hubieramos resuelto ingenuamente, una verificación sencilla muestra que

$$y(x) = 0, \tag{I.3.3}$$

es también solución del problema (I.3.1), con lo que evidenciamos que el problema no tiene solución única. Mostraremos a continuación que dicho problema tiene una infinidad de soluciones, en efecto, para $b \geq a$

$$y(x) = \begin{cases} = 0 \text{ si } x \leq b \\ \dfrac{1}{27}(x-b)^3 \text{ si } x \geq b \end{cases}$$

es también solución de (I.3.1). Para $c \leq a$,

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{27} \text{ si } x \leq c \\ 0 \text{ si } x \geq c \end{cases}$$

es también solución de (I.3.1). Por último, para $c \leq a \leq b$,

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{27} \text{ si } x \leq c \\ 0 \text{ si } c \leq x \leq b \\ \dfrac{1}{27}(x-b)^3 \text{ si } x \geq b \end{cases}$$

es también solución del problema (I.3.1). Estas soluciones pueden apreciarse en la figura I.2.

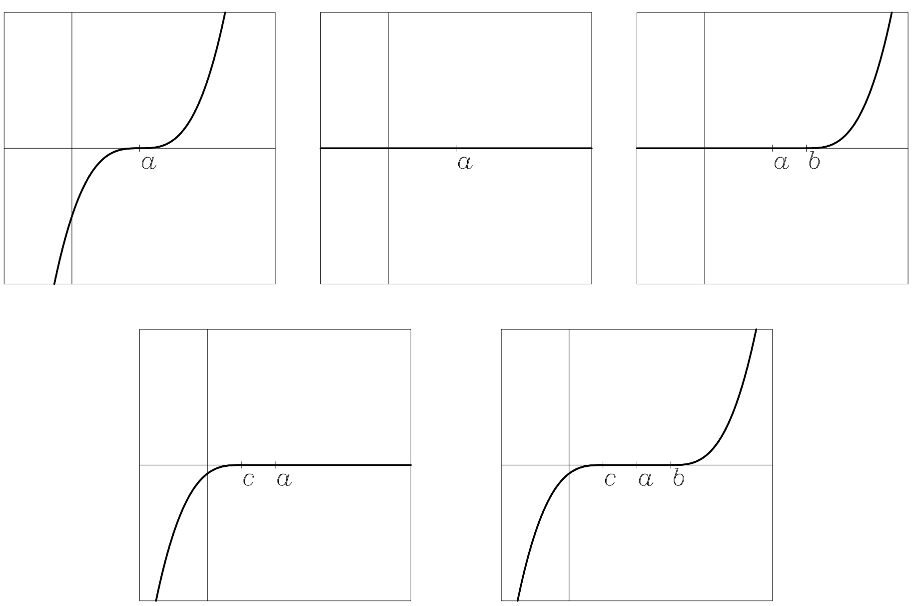


Figura I.2.- Soluciones del problema (I.3.1)

El problema (I.3.1) a primera vista era un problema completamente sencillo, sin embargo acabamos de mostrar que tiene una infinidad de soluciones, sin poder elegir aquella que pueda convenirnos para satisfacer nuestros requerimientos de solución del problema.

Condiciones suficientes para la existencia y unicidad de soluciones

Definición I.3.1.- Se dice que una función $f : I \times U \to \mathbb{R}$ continua, con I, U intervalos satisface una condición de Lipschitz si para todo subintervalo cerrado y acotado J de I, existe una constante $C_J > 0$ tal que $\forall x \in J$ y $\forall y, z \in U$, se tiene

$$|f(x,z) - f(x,y)| \leq C_J\,|z-y|\,. \tag{I.3.4}$$

Ejemplos

1.- Consideremos

$$f(x,y) = a(x)y + b(x),$$

donde a, b son funciones continuas. f satisface una condición de Lipschitz por que

$$|f(x,z) - f(x,y)| = |a(x)|\,|z-y| \leq \max_{x\in J} |a(x)|\,|y-z|\,.$$

2.- Consideremos

$$f(x,y) = \sin y$$

satisface una condición de Lipschtiz; en efecto, aplicando el teorema del valor medio, se tiene

$$|\sin y - \sin z| = |\cos\xi|\,|y-z| \leq 1\,|y-z|\,.$$

Teorema I.3.2.- *Supongamos que $f : I \times U \to \mathbb{R}$ continua satisface una condición de Lipschtiz y $x_0 \in I$, $y_0 \in U$, entonces el problema a valor inicial*

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y),\\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

admite una única solución.

Demostración.- Aunque no haremos una demostración formal y rigurosa del teorema, daremos un bosquejo de lo que corresponde a la existencia de la solución. Para tal efecto, definiremos de manera recursiva la sucesión de funciones

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= y_0,\\ \varphi_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi_n(s))\,ds. \end{aligned}$$

Se muestra que esta sucesión de funciones es convergente y su límite es una función $\varphi(x)$ que es solución del problema a valores iniciales planteado. Lo importante de esta demostración y lo que hay que retener es la sucesión de funciones definidas más arriba. Esta demostración y la construcción de la sucesión se debe a Piccard, matemático francés del siglo XIX.

□

Ejemplo

3.- La función $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = y^{2/3}$ si bien es continua, no satisface una condición de Lipschtiz, porque sino el problema a valor inicial (I.3.1) tendría solución única.

Verificar que una función satisface una condición de Lipschtiz, puede resultar a menudo una tarea complicada. Tenemos un resultado más manipulable para determinar cuando un problema a valor inicial tiene solución única.

Corolario I.3.3.- *Si $f(x,y)$ es una función continua y continuamente derivable respecto a y, entonces el problema a valor inicial*

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_o \end{aligned}$$

admite solución única.

Corolario I.3.4.- *Si $f(x,y)$ es una función continua y continuamente derivable respecto a y, entonces la solución general de*

$$y' = f(x,y)$$

forma una familia uniparamétrica de curvas, es decir la solución general puede escribirse como

$$F(x,y,c) = 0,$$

donde c hace el papel de constante.

Ejercicio.- Verificar que las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales de primer orden de tipo lineal, tipo Bernouilli, de tipo separable y de tipo homogéneo pueden expresarse como

$$F(x,y,c) = 0.$$

Soluciones Aproximadas de una Ecuación Diferencial

En general, es imposible expresar una solución particular o la solución general de una ecuación diferencial como composición de funciones elementales.

Por otro lado, en la práctica solo se resuelven problemas diferenciales, y la solución que acompaña el problema da informaciones cualitativas y en algunos casos cuantitativas.

Las ecuaciones diferenciales son parte de los modelos matemáticos que describen un fenómeno, por lo que la descripción de cierta manera es parcial, sujeta a errores de aproximación, debido a las simplificaciones que se hace con el modelo. En consecuencia es inutil tratar de determinar una solución de manera exacta y es justificable por la misma razón tratar con aproximaciones de las soluciones.

Iteraciones de Piccard

Ya nos referimos a las iteraciones de Piccard en el bosquejo de demostración del teorema I.3.2. Este método está formulado para resolver problemas a valores iniciales y no encontrar la solución general de una ecuación diferencial.

Consideremos el problema a valor inicial

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y), \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

donde f es una función continua que satisface una condición de Lipschtiz. Las iteraciones de Piccard están dadas por:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= y_0, \\ \varphi_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi_n(s))\,ds, \quad k = 0,1,\ldots. \end{aligned}$$

Cuando f satisface una condición de Lipschitz, la sucesión de funciones φ_n, tiende a una función límite $\varphi(x)$. Por lo tanto, se tiene

$$\varphi'(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))\,ds,$$

se ve inmediatamente que $\varphi(x_0) = y_0$ y derivando se verifica que φ es solución de la ecuación diferencial.

Es obvio que utilizando el métod de Piccard, no se llegara a la solución exacta, porque es humanamente imposible determinar la totalidad de las funciones de la sucesión. Por consiguiente, nos contentamos con determinar un número finito de estas funciones.

Por otro lado debemos remarcar que si estamos utilizando un método para aproximar la solución del problema planteado, es porque encontrar la solución de éste es sumamente complicada, por no decir imposible. Ahora bien, el cálculo de las integrales puede ser también tan complicado como la resolución de la ecuación por lo que este método tiene más un caracter teórico que práctico.

Ejemplo

4.- Encontremos una aproximación de la solución del problema a valor inicial

$$\begin{aligned} y' &= y, \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

En este ejemplo $f(x,y) = y$, por lo que las iteraciones de Piccard están dadas por:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = 1,\\
&\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x 1\, ds = 1 + x,\\
&\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x (1+s)\, ds = 1 + x + \frac{1}{2}x^2,\\
&\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x (1 + s + \frac{1}{2}s^2)\, ds = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3\\
&\qquad \vdots\\
&\varphi_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.
\end{aligned}$$

Polígonos de Euler

La utilización del método de Piccard para resolver problemas a valor inicial en general solo tiene un interés teórico, por lo que para encontrar aproximaciones de las soluciones de los problemas a valor inicial se prefiere otras alternativas.

Consideremos la ecuación diferencial de primer orden

$$y' = f(x,y),$$

donde f es continua. Si $\varphi(x)$ es una solución de esta ecuación, se tiene

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Por otro lado, se tiene

$$\varphi'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

escrito de otra manera, se tiene

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + r(x,h),$$

donde

$$\lim_{h\to} \frac{r(x,h)}{h} = 0.$$

Si despreciamos $r(x,h)$, la expresión

$$g(h) = \varphi(x) + h\varphi'(x)$$

representa la ecuación paramétrica de la recta tangente al grafo de φ en el punto x.

Por otro lado, $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, por lo que la ecuación paramétrica de la recta tangente se convierte en

$$g(h) = \varphi(x) + hf(x, \varphi(x)).$$

Ahora bien, la recta tangente de una curva en punto dado es la recta que mejor aproxima el comportamiento de la curva. Por consiguiente si h es bastante pequeño es razonable aproximar $\varphi(x+h)$ pro $g(h)$.

De esta manera, podemos definir un método de aproximación para resolver el problema diferencial siguiente

$$y' = f(x, y),$$
$$y(x_0) = y_0$$

y queremos determinar $y(x_f)$. Para simplificar el problema suponemos que $x_f > x_0$. Dividimos el intervalo $[x_0, x_f]$ en

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = x_f,$$

planteamos $h_k = x_k - x_{k-1}$ para $k = 1, \ldots, n$. Definimos

$$y_k = y_{k-1} + h_k f(x_{k-1}, y_{k-1}), \quad k = 1, \ldots, n;$$

y tomamos como aproximación de $y(x_n)$ y_n.

Ejemplo

5.- Consideremos el problema diferencial

$$y' = y - y^2 + x,$$
$$y(0) = 0;$$

y determinemos $y(1)$. Dividiendo el intervalo $[0, 1]$ de manera equidistante con $h = 1/10$, (n=10), se obtiene el resultado que puede observarse en la figura I.3, al igual que la solución exacta. La solución obtenida por el método de Euler se la remarca por la forma poligonal de su grafo.

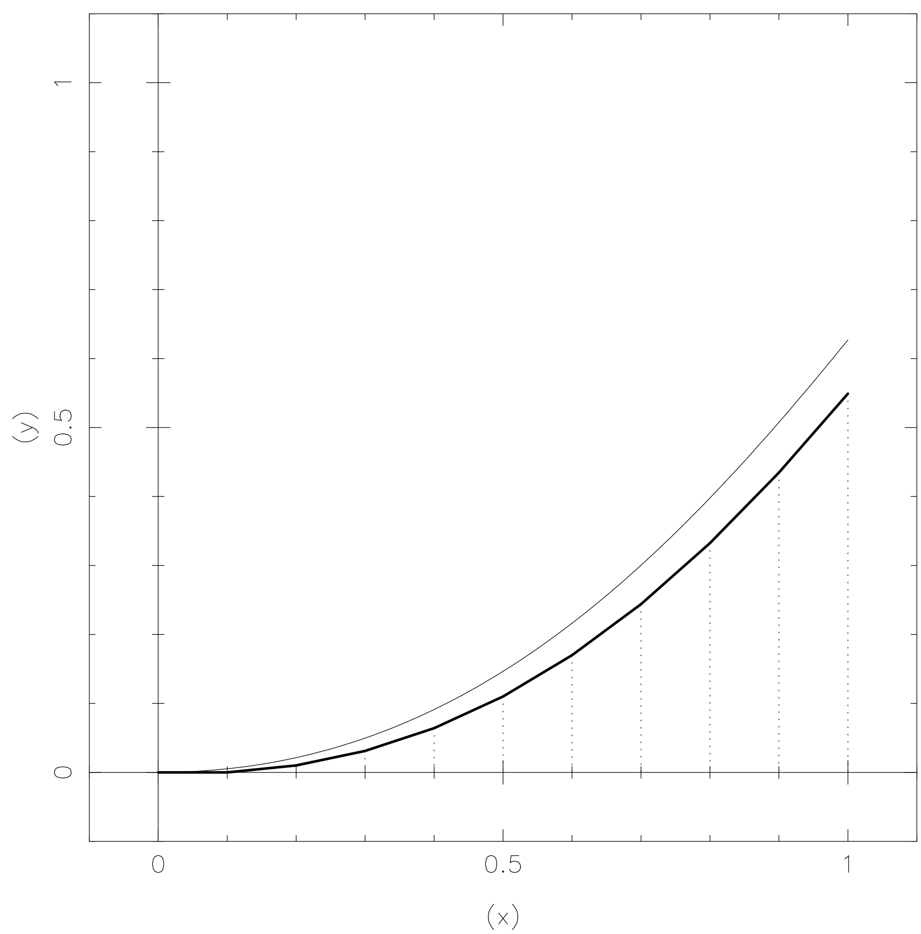


Figura I.3.- Ilustración del método de Euler

El método de Euler debe utilizarse para obtener aproximaciones de soluciones que nos den más información cualitativa que cuantitativa. Para obtener aproximaciones de mayor precisión, no es aconsejable utilizar el método de Euler.

Isoclinas

El lado derecho de la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y)$$

induce un campo de pendientes sobre $\mathbb{R}^2$. Remarcamos que en el punto (x, y), $f(x, y)$ es la pendiente de la recta tangente a la o las soluciones que pasan por (x, y).

Una isoclina es una curva de igual pendiente; es decir es una curva de ecuación

$$f(x, y) = m.$$

donde m es la pendiente.

La idea del método de las isoclinas consiste en trazar isoclinas para diferentes valores de pendientes y luego dibujar las soluciones utilizando las pendientes de cada una de las isoclinas.

Ejemplo

6.- Determinemos algunas de las soluciones utilizando isoclinas de la ecuación diferencial

$$y' = y - y^2 + x.$$

Las isoclinas están dadas por las ecuaciones

$$x = (y - 1/2)^2 + m - 1/4$$

En la figura I.4 se tiene las isoclinas, con el respectiva pendiente que representan, en lineas segmentadas. Los grafos de las soluciones son las lineas continuas.

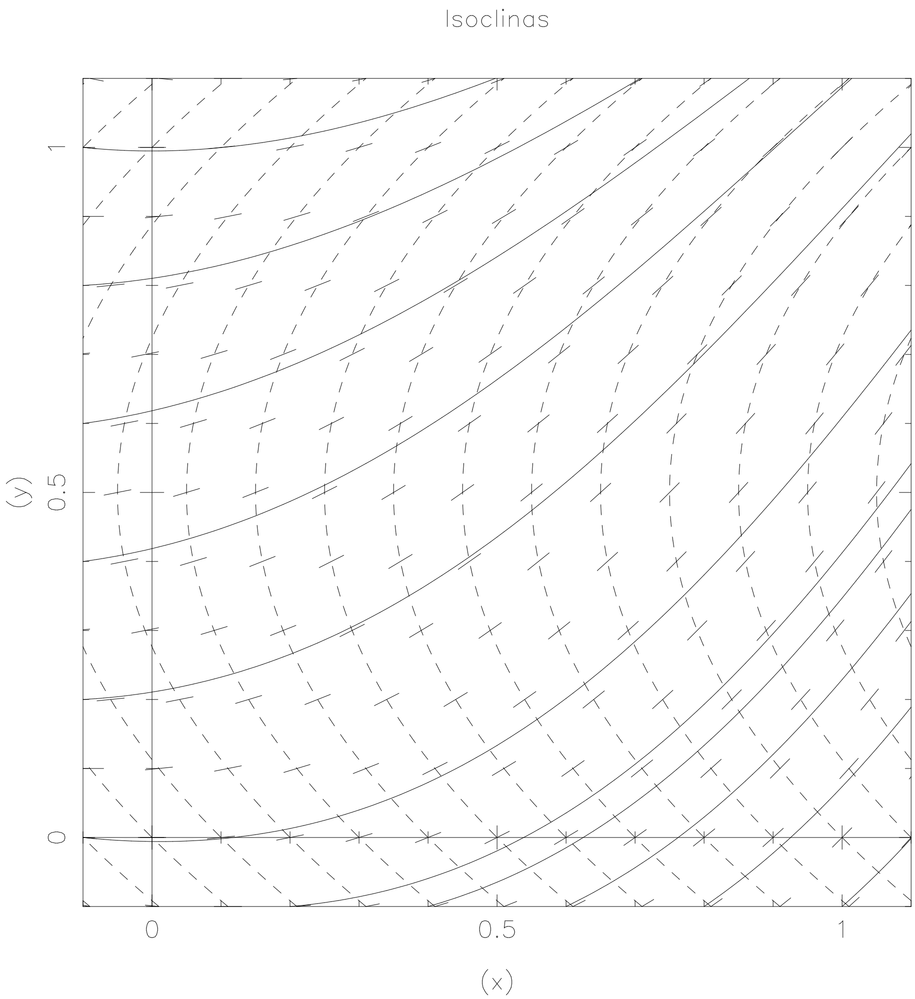


Figura I.4.- Ilustración del método de las Isoclinas

I.4 Ecuaciones de Orden Superior

En las dos secciones precedentes vimos ecuaciones diferenciales y problemas diferenciales relacionados a ecuaciones de primer orden. En esta sección estudiaremos las ecuaciones de orden superior más corrientes.

Reducción del Orden

Consideremos la ecuación diferencial de orden n, en forma explícita,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

con f continua.

Partimos del supuesto que mientras el orden de la ecuación diferencial es mayor, la resolución es más dificil. Por consiguiente, si se puede convertir la ecuación a resolver en una de orden más pequeño, la resolución se habrá “simplificado”.

La reducción de orden es posible en los siguientes dos casos:

1.- La ecuación diferencial de orden n es de la forma

$$y^{(n)} = f(x, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}), \tag{I.4.1}$$

es decir, en la ecuación no interviene la variable y de manera explícita. Planteando

$$z(x) = y'(x),$$

la ecuación (I.4.1), se convierte en la ecuación

$$z^{(n-1)} = f(x, z, z', \ldots, z^{(n-2)}) \tag{I.4.2}$$

que es una ecuación de orden $n-1$.

2.- La ecuación diferencial de orden n es de la forma

$$y^{(n)} = f(y, y', \ldots, y^{(n-1)}); \tag{I.4.3}$$

es decir, en la ecuación diferencial no interviene explícitamente la variable x. Planteamos

$$y' = u(y).$$

A diferencia del primer caso, en el segundo y' se expresa en función de y. El siguiente paso es expresar las otras derivadas de y, en función de y, para lo que derivamos utilizando la regla de la cadena.

$$y'' = (y')' = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}.$$

Pasamos a la siguiente derivada.

$$y''' = (y'')' = \frac{d}{dy}(u\frac{du}{dy})\frac{du}{dy} = u\frac{du}{dy}\frac{d^2u}{dy^2} + (\frac{du}{dy})^3.$$

Observamos que tanto y'', y''' han bajado de un orden cuando se expresa en función de y. Continuando con el mismo procedimiento se llega a obtener la ecuación

$$u^{(n-1)} = g(y, u, \ldots, u^{(n-2)},$$

donde las derivadas de u son respecto a y.

Ejemplos

1.- Resolvamos la ecuación
$$y'' = \cos x.$$
Mediante la substitución $z = y'$, se obtiene la ecuación diferencial de primer orden
$$z' = \cos x,$$
cuya solución general es
$$z = \sin x + C.$$
Por consiguiente y satisface la ecuación diferencial
$$y' = \sin x + C,$$
de donde
$$y(x) = -\cos x + Cx + D.$$

2.- Resolvamos la ecuación diferencial de segundo orden
$$y'' + y = 0,$$
en esta ecuación x no interviene explicítamente, por lo que planteando $y' = u(y)$, da la ecuación diferencial de primer orden
$$u'u + y = 0,$$
que es una ecuación de tipo separable, la solución de esta ecuación es
$$u^2 + y^2 = C.$$
Suponiendo $y \geq 0$ y $C \geq 0$, se tiene
$$y' = \sqrt{C^2 - y^2},$$
ecuación de tipo separable, cuya solución es
$$\arcsin(y/C) = x + D,$$
es decir
$$y = C\sin(x + D),$$
que se convierte en
$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden Superior

Una ecuación diferencial lineal de orden n es una ecuación que puede escribirse de la forma
$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \qquad \text{(L)},$$
con $a_0, \ldots, a_{n-1}$ y b funciones continuas sobre un intervalo.

Ecuaciones Lineales Homogeneas

Se dirá que la ecuación (L) de orden n, es homogénea si $b(x)$ es identicamente nula, es decir si la ecuación puede expresarse como
$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \qquad \text{(LH)}$$
El estudio de las ecuaciones lineales homogéneas de orden n sigue el mismo camino que el seguido para las ecuaciones lineales de primer orden.

Proposición I.4.1.- *La solución general de una ecuación lineal homogénea de orden n, es un subespacio vectorial de dimensión n.*

Demostración.-Al igual que en caso de primer orden, puede verificarse que la solución general de (LH) es un subespacio vectorial. Probar que la dimensión es n, escapa de los objetivos del presente curso.

□

Al ser la solución general de (LH) un espacio vectorial real de dimensión n, para determinar cualquier solución de (LH) es suficiente conocer n soluciones linealmente independientes.

Definición I.4.2.- Se llama **sistema fundamental** (SF) de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{LH}$$

a un conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ de soluciones de (LH) que sean linealmente independientes.

Proposición I.4.3.- *El problema a valor inicial*

$$\begin{aligned}
&y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,\\
&y(x_0) = y_0,\\
&y'(x_0) = y_1,\\
&\vdots\\
&y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}
\end{aligned}$$

con x_0 en el intervalo de definición de las a_i, tiene solución única.

Demostración.- Sea $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ un sistema fundamental de la ecuación diferencial (LH). Por consiguiente, cualquier solución de (LH) se escribe de manera única como

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x). \tag{I.4.4}$$

Por consiguiente los c_i satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccccc}
c_1\varphi_1(x_0) & + & c_2\varphi_2(x_0) & + & \cdots & + & c_n\varphi_n(x_0) & = & y_0\\
c_1\varphi_1'(x_0) & + & c_2\varphi_2'(x_0) & + & \cdots & + & c_n\varphi_n'(x_0) & = & y_1\\
\vdots & & & & & & & & \vdots\\
c_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0) & + & c_2\varphi_2^{(n-1)}(x_0) & + & \cdots & + & c_{n-1}!\varphi_n^{(n-1)}(x_0) & = & y_{n-1}
\end{array}$$

que escrito de manera matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix}
\varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0)\\
\varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0) & \cdots & \varphi_n'(x_0)\\
\vdots & & & \vdots\\
\varphi_1^{(n-1)}(x_0) & \varphi_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x_0)
\end{pmatrix}}_{W(x_0)}
\underbrace{\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}}_{C}
=
\underbrace{\begin{pmatrix} y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}}_{Y_0};$$

es decir

$$W(x_0)C = Y_0. \tag{(I.4.5)}$$

Ahora bien $W(x_0)$ es inversible, sino $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ no sería un sistema fundamental de la ecuación. Por lo tanto

$$C = (W(x_0))^{-1}Y_0$$

da la existencia y la unicidad.

□

Definición I.4.4.- Se llama a

$$W(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

la matriz **wronskiana** del sistema $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ y $\det W(x)$ el wronskiano del sistema $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.

Corolario I.4.5.- *Sea $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ n soluciones de la ecuación (LH) de orden n*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0;$$

entonces $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es un sistema fundamental de (LH), si y solamente si $W(x)$ es inversible para todo x, si y solamente si $\det W(x) \neq 0$ para todo x.

Demostración.- Consecuencia directa del Algebra Lineal. □.

Ejemplo

3.- Consideremos la ecuación diferencial lineal homogenea de segundo orden

$$y'' + y = 0,$$

por ejemplo 2, se tiene que $\cos x$ y $\sin x$ son soluciones de la ecuación en cuestión. El wronskiano está dado por

$$\det W(x) = \det \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ sinx & \cos x \end{pmatrix} = 1,$$

de donde $\cos x$ y $\sin x$ es un sistema fundamental, por lo que la solución general está dada por

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Determinación de Sistemas Fundamentales

Habiendo visto que para determinar la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea es suficiente conocer un sistema fundamental de soluciones, de la misma manera sabiendo reconocer si un conjunto de soluciones particulares de una ecuación (LH) es un sistema fundamental, el siguiente paso es conocer los métodos que permitan encontrar tales sistemas.

Lastimosamente no existe un método general para poder determinar sistemas fundamentales de una ecuación lineal homogénea. Sin embargo podemos resaltar las siguientes situaciones en las que se puede determinar un sistema fundamental:

1.- Si la ecuación es de segundo orden y se conoce una solución no nula.
Sea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

y $\varphi(x)$ una solución no nula. Suponemos que la otra solución del sistema fundamental a determinar es de la forma

$$y(x) = c(x)\varphi(x),$$

donde $c(x)$ es una función no constante, caso contrario tendríamos dos soluciones linealmente dependientes. Derivando, se obtiene

$$y'(x) = c'(x)\varphi(x) + c(x)\varphi'(x),$$
$$y''(x) = c''(x)\varphi(x) + 2c'(x)\varphi'(x) + c(x)\varphi''(x);$$

remplazando en la ecuación diferencial, se tiene

$$\varphi(x)c''(x) + (2\varphi'(x) + \varphi(x)p(x))c'(x) + \underbrace{c(x)(\varphi''(x) + p(x)\varphi'(x) + q(x)\varphi(x))}_{=0} = 0,$$

de donde $c'(x)$ es solución de la ecuación de primer orden lineal homogénea, que ya sabemos resolver,

$$z'(x) + \frac{2\varphi'(x) + \varphi(x)p(x)}{\varphi(x)} z(x) = 0,$$

por consiguiente

$$c'(x) = e^{A(x)},$$

donde $A(x)$ es una primitiva de $-\dfrac{2\varphi'(x) + \varphi(x)p(x)}{\varphi(x)}$, por lo tanto

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} e^{A(s)}\, ds.$$

Ejemplo

4.- Consideremos la ecuación de segundo orden

$$x^2y'' - xy' - 3y = 0,$$

se verifica que $y(x) = x^3$ es una solución particular no nula de la ecuación diferencial de segundo orden en cuestion. Determinemos otra solución linealmente independiente. Planteamos

$$y(x) = c(x)x^3,$$

derivando y remplazando en lae cuación diferencial, se obtiene

$$x^5c'' + (6x^4 - x^4)c'(x) = 0,$$

es decir $c'(x)$ es solución de la ecuación diferencial

$$z' = -\frac{5}{x}z,$$

por lo que $c'(x) = 1/x^5$, de donde

$$c(x) = - = \frac{1}{4}x^{-4},$$

La solución de la ecuación diferencial, está dada por

$$y(x) = c_1x^3 + \frac{c_2}{x}.$$

2.- **La ecuación diferencial lineal es a coeficientes constantes.**
Es decir, la ecuación (LH), tiene la forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Para poder encontrar un sistema fundamental para este tipo de ecuaciones, hagamos un pequeño repaso de variable compleja.

Un poco de Variable Compleja

Recordemos que $\mathbb{C}$ el plano complejo es $\mathbb{R}^2$ provisto de una adición y una multiplicación que hacen de $\mathbb{C}$ un cuerpo conmutativo. Un elemento $z \in \mathbb{C}$ puede escribirse de la manera siguiente

$$z = x + iy \text{ con } x, y \in \mathbb{R}.$$

Una función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ admite la representación siguiente

$$f(x) = u(x) + iv(x),$$

donde $u, v : I \to \mathbb{R}$.
Ahora bien, si u y v son derivables, f es derivable y

$$f'(x) = u'(x) + v'(x).$$

Proposición I.4.6.- *Sean $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$, entonces, se tiene:*
i) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$. (I.4.6)
ii) $(af)'(x) = af'(x)$. (I.4.7)
iii) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. (I.4.8)

Demostración.- Ejercicio.

Remarca.-Las reglas de cálculo para derivadas son las mismas que para las funciones reales.

Definición I.4.7.- Sea $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$, se define

$$e^{ax} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x). \tag{I.4.9}$$

Proposición I.4.8.- *Se tiene:*
i) Dados $a, b \in \mathbb{C}$, se verifica

$$e^{(a+b)x} = e^{ax}e^{bx}. \tag{I.4.10}$$

ii) Para $a \in \mathbb{C}$, se verifica

$$(e^{ax})' = ae^{ax}. \tag{I.4.11}$$

Demostración.- El punto i) ejercicio. Demostremos el punto ii). Se tiene

$$\begin{aligned}
(e^{ax})' &= e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)' \\
&= \alpha e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) + e^{\alpha x}(-\beta \sin \beta x + i\beta \cos \beta x) \\
&= \alpha e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) + i\beta e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) \\
&= (\alpha + i\beta)e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) = ae^{ax}.
\end{aligned}$$

□

Reconsideremos nuevamente la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n a coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

y planteamos

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y. \tag{LH}$$

Remarcamos que L es una aplicación lineal y resolver la ecuación (LH), es encontrar $y(x)$ tal que $L(y) = 0$.
Ahora bien, en lugar de considerar solamente soluciones reales, podemos prolongar nuestras soluciones a soluciones $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
Utilizando las reglas de cálculo para derivadas, se tiene para $r \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
L(e^{rx}) &= (e^{rx})^{(n)} + a_{n-1}(e^{rx})^{(n-1)} + \cdots + a_1(e^{rx})' + a_0 e^{rx} \\
&= r^n e^{rx} + a_{n-1}r^{n-1}e^{rx} + \cdots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} \\
&= e^{rx}(r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0) \\
&= e^{rx} l(r).
\end{aligned}$$

Definición I.4.9.- El polinomio $l(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$ es el **polinomio característico** (PC) de la ecuación diferencial lineal homogénea a coeficientes constantes de orden n

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{LHC}$$

Acabamos de demostrar el:
Teorema I.4.10.- *$y(x) = e^{rx}$ es solución de la ecuación* (LHC) *si y solamente si r es una raiz de $l(\lambda)$.*

Remarca.-La ecuación (LHC) admite al menos una solución de la forma $y(x) = e^{rx}$ debido al Teorema Fundamental del Algebra que asegura de al menos una raiz $r \in \mathbb{C}$ del polinomio característico de (LHC).

El siguiente paso es estudiar las soluciones de la forma e^{rx}, teniendo en cuenta que nuestro objetivo es determinar un sistema fundamental de soluciones "reales" de (LHC). Sea $r \in \mathbb{R}$, se tiene dos casos:

1) $r \in \mathbb{R}$. En este caso e^{rx} es una función real, por lo que $y(x) = e^{rx}$ es una solución "real" de (LHC).
2) $r = \alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$. Como el (PC) es a coeficientes reales $\bar{r} = \alpha - i\beta$ es también raiz del (PC), por lo que obtenemos las siguientes soluciones "complejas"

$$\varphi(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$
$$\psi(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Como la solución general es un subespacio vectorial, se tiene que

$$y_1(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + \psi(x)) = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$y_2(x) = \frac{1}{2i}(\varphi(x) - \psi(x)) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

son soluciones de (LHC), pero $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones "reales" de (LHC).

Ejercicio.- Mostrar que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son linealmente independientes. (Utilizar el wronskiano).

En resumen, para cada raiz $r \notin \mathbb{R}$ obtenemos un par de soluciones linealmente independientes. Con lo desarrollado más arriba estamos en la posibilidad de enunciar nuestro primer resultado.

Teorema I.4.11.- *Si el polinomio característico de la ecuación diferencial (LHC) de orden n, tiene sus n raices diferentes, entonces se tiene un sistema fundamental para (LHC). Además si $r \in \mathbb{R}$ es raiz del (PC), e^{rx} hace parte del sistema fundamental; si $r = \alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$ $e^{\alpha x}\cos\beta x$ y $e^{\alpha x}\sin\beta x$ hacen parte del sistema fundamental.*

Demostración.- Efectivamente cada raiz aporta con una o dos soluciones para conformar el sistema fundamental, si la raiz es real se tiene una solución; si la raiz no es real, ésta y su conjugada aportan con dos soluciones. En resumen se tiene n soluciones no nulas. Utilizando el wronskiano se puede verificar que son linealmente independientes.

□

Ejemplo

5.- Consideremos la ecuación diferencial de orden 4.

$$y^{(4)} - y = 0.$$

El polinomio característico está dado por

$$l(\lambda) = \lambda^4 - 1 = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1)(\lambda - 1).$$

Se deduce a partir de la factorización que las raices son:

$$1,\ -1,\ i,\ -i;$$

todas diferentes, por lo que el sistema fundamental estará dado por

$$e^x,\ e^{-x},\ \cos x,\ \sin x.$$

La solución general de esta ecuación es

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x.$$

Polinomio característico con raices múltiples
El teorema precedente no es aplicable cuando el polinomio característico de la ecuación (LHC) tiene raices múltiples o multiplicidad mayor a 1, ya que faltan soluciones para completar un sistema fundamental.
Introduciendo los operadores o aplicaciones lineales

$$\begin{aligned} D(y) &= y' \\ I(y) &= y. \end{aligned}$$

y utilizando la convención $D^k(y) = D(D^{k-1}(y)) = y^{(k)}$, el operador L dado más arriba, se puede escribir como

$$L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I.$$

Como $l(\lambda)$ el polinomio característico de la ecuación (LHC), puede factorizarse en $\mathbb{C}$, sin importar el orden de los factores como

$$l(\lambda) = (\lambda - r_1)^{n_1}(\lambda - r_2)^{n_2}\cdots(\lambda - r_m)^{n_k},$$

donde $r_1, \ldots, r_m$ son las raices diferentes de $l(\lambda)$ y los n_j son las multiplicidades de cada una de las raices r_j. Observamos que $n_j \geq 1$ y $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$ el orden de la ecuación (LHC).
La factorización de l, permite factorizar por lo tanto L de la manera siguiente

$$L = (D - r_1 I)^{n_1}(D - r_2 I)^{n_2}\cdots(D - r_m)^{n_m}.$$

Proposición I.4.12.- *Si $\varphi(x)$ es solución de $(D - r_j I)^{n_j}$, donde r_j es una raiz del polinomio característico de (LHC) y n_j es la multiplicidad de la raiz, entonces φ también es solución de (LHC).*
Demostración.- Como el orden de los factores no importa, L puede escribirse como

$$L = (\prod_{i \neq j}(D - r_i I)^{n_i})(D - r_j I)^{n_j},$$

de donde

$$\begin{aligned} L(\varphi(x)) &= (\prod_{i\neq j}(D - r_i I)^{n_i})((D - r_j I)^{n_j}(\varphi(x))) \\ &= (\prod_{i\neq j}(D - r_i I)^{n_i})(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Ahora veamos las soluciones con las que aporta $(D - r_j I)^{n_j}$ al sistema fundamental.
Proposición I.4.13.- *Son soluciones linealmente independientes de $(D - r_j I)^{n_j}(y) = 0$ las funciones*

$$e^{rx},\ xe^{rx}, \ldots, x^{n_j-1}e^{rx}.$$

Demostración.- Por inducción sobre n_j. Para $n_j = 1$, $e^{r_1 x}$ es solución de la ecuación, la verificación es trivial. Suponemos cierto para $n_j - 1$ con $n_j > 1$. Por hipótesis de inducción, son soluciones $e^{r_j}, \ldots, x^{n_j-2}e^{r_j x}$, porque

$$(D - r_j I)^{n_j} = (D - r_j I)(D - r_j I)^{n_j - 1}.$$

Solo debemos verificar que $x^{n_j-1}e^{r_j x}$ es solución, en efecto

$$\begin{aligned} (D - r_j I)^{n_j}(x^{n_j-1}e^{r_j x}) &= (D - r_j I)^{n_j-1}(D - r_j)(x^{n_j-1}e^{r_j x}) \\ &= (D - r_j I)^{n_j-1}(D - r_j)((n_j - 1)x^{n_j-2}e^{r_j x} + r_j x^{n_j-1}e^{r_j x} - r_j x^{n_j-1}e^{r_j x}) \\ &= (D - r_j I)^{n_j-1}((n_j - 1)x^{n_j-2}e^{r_j x}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Remarca.- Si r_j es una raiz no real de multiplicidad n_j, entonces $\bar{r}_j$ es una raiz de multiplicidad n_j y contribuyen ambas raices con $2n_j$ soluciones al (SF), las cuales son

$$\begin{array}{c} e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots,\ x^{n_j-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots,\ x^{n_j-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{array}$$

Finalmente enunciamos:
Teorema I.4.14.- *Sean $r_1, \ldots, r_m$ las raices diferentes de una ecuación (LHC) de orden n y la factorización del (PC) está dada por*

$$l(\lambda) = (\lambda - r_1)^{n_1}(\lambda - r_2)^{n_2}\cdots(\lambda - r_m)^{n_k};$$

entonces las contribuciones de soluciones para el sistema fundamental de (LHC) está dada de la manera siguiente, si $r_j \in \mathbb{R}$, r_j contribuye con

$$e^{rx},\ xe^{rx}, \ldots, x^{n_j-1}e^{rx};$$

si $r_j = \alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$, r_j y $\bar{r}_j$ contribuyen con

$$\begin{array}{c} e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots,\ x^{n_j-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots,\ x^{n_j-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{array}$$

Demostración.- Un pequeño ejercicio de conteo mostrará que hay exactamente n soluciones. El wronskiano verificará la independencia lineal.

□

Ejemplo

6.- Consideremos la ecuacion diferencial (LHC)

$$y^{(6)} - 2y^{(5)} + 3y^{(4)} - 4y^{(3)} + 3y'' - 2y' + y = 0,$$

el polinomio característico de la ecuación está dado por

$$l(\lambda) = \lambda^6 - 2\lambda^5 + 3\lambda^4 - 4\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 1)^2.$$

Deducimos que 1, i y $-i$ son raices del polinomio característico, las tres de multiplicidad 2, por lo que el sistema fundamental buscado está dado por las soluciones:

$$e^x,\ xe^x,\ \cos x,\ \sin x,\ x\cos x,\ x\sin x.$$

La solución general, será por consiguiente

$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3\cos x + c_4\sin x + c_5x\cos x + c_6x\sin x.$$

3.- Si laa ecuación lineal homogénea es de la forma

$$x^x y^n + a_{n-1}x^{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_1xy' + a_0y = 0,$$

la substitución $x = e^t$, convierte esta ecuación en una (LHC). Ver ejercicios.

4.- **Utilización de Series Enteras.-** Recomendable para determinar la solución que satisfage un problema a valor inicial. Recordemos los conceptos necesarios para desarrollar este procedimiento.
Definición I.4.15.- Sea $f : I \subset \mathbb{R}$ una función indefinidamente derivable, se dice que f es análitica en el punto x_0, si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < \rho,$$

con $0 < \rho \leq +\infty$.
Damos algunas de las propiedades, sin demostración de las funciones análiticas.
Proposición I.4.16.- *Supongamos que f, g son análiticas en el punto x_0, entonces*

i)
$$(\alpha f + \beta g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha c_n + \beta d_n)(x - x_0)^n,$$

ii)
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1},$$

iii)
$$f^{(n)}(x_0) = n! c_n,$$

iv)
$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k} \right) (x - x_0)^n,$$

donde
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n.$$

Consideremos la ecuación lineal homogénea de orden n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) = 0. \tag{LH}$$

x_0 es un punto **ordinario**, si cada una de las funciones $a_k(x)$ es análitica en $x = x_0$, caso contrario se dirá que x_0 es un punto **singular**. Enunciamos sin demostración el:
Teorema I.4.17.- *Si x_0 es un punto ordinario de la ecuación (LH), entonces cualquier solución es análitica en $x = x_0$.*
La determinación de un sistema fundamental para la ecuación (LH), se la hace eligiendo un punto x_0 que sea ordinario y se considera los n problemas a valor inicial

$$\begin{aligned} &y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) = 0, \\ &y^{(k)}(x_0) = \delta_{kj}, \quad k = 1, \ldots, n-1; \quad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

donde $\delta_{kj} = 0$ si $k \neq j$ y $\delta_{kj} = 1$ si $j = k$. Luego se resuelve cada uno de los problemas planteando

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

desarrollando en series de potencias cada una de las $a_j(x)$ y utilizando las reglas de cálculo dadas en la proposición (I.4.16).

Ejemplo

7.- Determinemos la solución general de
$$y'' + xy = 0.$$
Observamos que la ecuación es (LH) y los coeficientes de las derivadas de y son análiticas, ($a_1(x) = 0$, $a_0(x) = x$), para cualquier punto de la recta real. Elegimos por comodidad $x_0 = 0$ ya que x ya está desarrollada en serie de potencias. Planteando
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$
se tiene $Y c_n = y^{(n)}(0)/n!$ y en particular $y''(0) = 0y(0)$ da $c_2 = 20$.
Por otro lado para $n \geq 3$, se tiene
$$y^n(x) = (-xy(x))^{(n-2)} = -\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^{(k)} y^{(n-k-2)}(x) = -xy^{(n-2)}(x) - (n-2) y^{(n-3)}(x),$$

de donde

$$c_n = -\frac{(n-2)(n-3)!}{n!}c_{n-3}. \tag{I.4.12}$$

Se observa inmediatamente que $c_{3k+2} = 0$.

Planteando $c_0 = y_0$ y $c_1 = y_1$, donde y_0 y y_1 son los valores iniciales y utilizando la fórmula (I.4.12), se obtiene los valores de los restantes coeficientes.

Puntos Singulares Regulares

Definición I.4.18.- Se dice que el punto x_0 singular de la ecuación (LH) de orden n es un punto **singular regular** si las funciones

$$a_{n-k}(x-x_0)^k, \quad k = 1, \ldots, n$$

son funciones anaáliticas.

Lo ideal es trabajar en puntos ordinariso, sin embargo la descripción de algunos fenómenos pasa por la solución de problemas diferenciales a valor inicial, en el que x_0 es un punto singular regular.

Para resolver utilizando series enteras, se plantea

$$y(x) = (x-x_0)^\gamma \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^{n+\gamma}$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}$, (se deberá determinar su valor) y se desarrolla en serie de potencias las funciones $a_{n-k}(x)(x-x_0)^k$ para obtener una ecuación para γ y relaciones recursivas para los c_k.

Ejemplo

8.- Resolvamos la ecuación diferencial

$$x^2y'' + xy' - m^2y = 0.$$

Para que el problema tenga sentido, cualquier problema a valor inicial en $x = 0$, debe satisfacer la condición que $y_0 = 0$, dejando libre y_1. Rescribiendo la ecuación en la forma requerida, se tiene

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{m^2}{x^2}y = 0.$$

Se observa inmediatamente que 1 y m^2 constantes son análiticas.

Planteando

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\gamma},$$

se obtiene

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\gamma)c_n x^{n+\gamma-1},$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\gamma)(n+\gamma-1)c_n x^{n+\gamma-2}.$$

Remplazando en la ecuación diferencial, se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+\gamma)(n+\gamma-1) + (n+\gamma) - m^2\right)c_n x^{n+\gamma-2} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+\gamma)^2 - m^2\right)c_n x^{n+\gamma-2} = 0$$

de donde obtenemos las ecuaciones

$$\left((n+\gamma)^2 - m^2\right)c_n = 0.$$

De estas ecuaciones deducimos que $c_n = 0$ para todo n excepto para solamente uno de los c_n. Si suponemos $c_0 \neq 0$, se tiene

$$\gamma^2 - m^2 = 0,$$

por lo que $\gamma = m$ o $\gamma = -m$. De aquí obtenemos dos solucioens diferentes:

$$y(x) = x^m, \quad y(x) = x^{-m}.$$

5.- Realizando una substitución conveniente para x. Ver ejercicios.

Solución de Ecuaciones Lineales (no Homogeneas)

Consideremos la ecuación diferencial lineal de orden n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x). \tag{L}$$

donde las $a_i(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas definidas sobre un intervalo. Suponemos que b no es identicamente nula, el caso cuando b es la función nula ya ha sido estudiado. A la ecuación (L) le asociamos la ecuación

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{LH}$$

Proposición I.4.19.- *Sea ψ una solución particular de (L) y φ cualquier solución de (LH), entonces*

$$\varphi + \psi$$

también es solución de (L).

Demostración.- Similar al caso de primer orden.

Proposición I.4.20.- *Sea ψ una solución particular de (L), entonces cualquier solución de (L) es de la forma*

$$\varphi + \psi,$$

donde φ es solución de (LH).

Demostración.- Similar al caso de primer orden.

Por lo tanto, para conocer la solución general de (L), es suficiente conocer una solución particular de (L) y la solución general de (LH), algo que ya sabemos saber en un gran número de situaciones. Este resultado lo expresamos, mediante la regla memotécnica

$$\boxed{\text{Solución general de (L)}} = \boxed{\text{Solución general de (LH)}} + \boxed{\text{Una solución particular de (L)}}$$

Proposición I.4.21.- *El problema a valor inicial*

$$\begin{aligned}
&y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)\\
&y(x_0) = y_0,\\
&y'(x_0) = y_1,\\
&\vdots\\
&y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}
\end{aligned}$$

tiene solución única.

Demostración.-Ejercicio.

Determinación de una solución particular de (L)

Podemos determinar una solución particular mediante:

i) **Al tanteo** Es posible adivinar una solución en algunos casos, por ejemplo cuando $b(x)$ es un polinomio, se puede intentar la solución particular con otro polinomio; si $b(x)$ es sin o cos se puede intentar con una expresión que contenga sin y cos; si $b(x)$ es una función exponencial, la solución particular debería ser otra función exponencial. En todo caso el procedimiento es el mismo que en el caso de primer orden.

ii) **Variación de Constantes.** Sea $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ un sistema fundamental de soluciones de (LH). Al igual que en el caso de primer orden se supone que la solución particular es de la forma

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\varphi_k(x).$$

Derivando ψ, se obtiene

$$\psi'(x) = \sum_{k=1}^{n} c'_k(x)\varphi_k(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\varphi'_k(x),$$

suponiendo

$$\sum_{k=1}^{n} c_k(x)\varphi'_k(x) = 0,$$

se tiene

$$\psi'(x) = \sum_{k=1}^{n} c'_k(x)\varphi_k(x).$$

Derivemos ψ' y obtenemos

$$\psi''(x) = \sum_{k=1}^{n} c'_k(x)\varphi'_k(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\varphi''_k(x),$$

suponiendo

$$\sum_{k=1}^{n} c'_k(x)\varphi'_k(x) = 0,$$

se tiene

$$\psi''(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\varphi'_k(x).$$

Repetimos el proceso de derivación hasta determinar $\psi^{(n-1)}$, suponiendo por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n} c'_k(x)\varphi_k^{(j)}(x) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-2.$$

y obteniendo por consiguiente

$$\psi^{(j)}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\varphi_k^{(j)}(x), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Finalmente introducimos los valores de $\psi^{(j)}$ en la respectiva ecuación diferencial, obteniendo

$$\sum_{k=1}^{n} c'_k(x)\varphi_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\varphi_k^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k(x)\varphi_k^{(j)}(x)\right) = b(x).$$

Reagrupando los terminos, se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} c'_k(x)\varphi_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\underbrace{\left(\varphi_k^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)\varphi_k^{(j)}(x)\right)}_{=0 \text{ solución de (LH)}} = b(x)$$

Resumiendo hemos obtenido n ecuaciones lineales para $c_1', c_2', \ldots, c_n'$,

$$\begin{array}{ccccccccc} c_1'(x)\varphi_1(x) & + & c_2'(x)\varphi_2(x) & + & \cdots & + & c_n'(x)\varphi_n(x) & = & 0 \\ c_1'(x)\varphi_1'(x) & + & c_2'(x)\varphi_2'(x) & + & \cdots & + & c_n'(x)\varphi_n'(x) & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ c_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) & + & c_2'(x)\varphi_2^{(n-1)}(x) & + & \cdots & + & c_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) & = & b(x) \end{array}$$

que escrito de manera matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}}_{W(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{pmatrix}}_{C'(x)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(x) \end{pmatrix}}_{B(x)};$$

es decir

$$W(x)C'(x) = B(x).$$

Ahora bien, como $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ es un sistema fundamental de (LH), $W(x)$ es inversible, por lo que

$$C'(x) = (W(x))^{-1}B(x),$$

obtenemos las funciones $c_k(x)$ integrando las respectivas $c_k'(x)$.

Ejemplo

9.- Hallemos la solución general de

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

La ecuación (LH) asociada, admite como sistema fundamental $\{\cos x, \sin x\}$. La aplicación de variación de constantes conduce a considerar el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/over \sin x \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema, por ejemplo por determinantes obtenemos:

$$c_1'(x) = -1, \quad c_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x},$$

de donde

$$c_1(x) = -x, \quad c_2(x) = \ln(\sin x).$$

La solución general está dada por consiguiente

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x\cos x + \ln(\sin x)\sin x.$$

I.5 Ejercicios

1.- Encontrar una solución particular, luego la solución general, de cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes:

(a) $y' + y = e^2$	(c) $y' - y = e^x$
(c) $y' + y = x^2$	(d) $y' + 2y = \sin x$

2.- Resolver la ecuación diferencial de Bernouilli

$$(1-x^2)y' - xy = axy^2$$

donde a es un parámetro real.

3.- Encontrar la solución general de cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $$y' = (x+y)^2,$$
b) $$(1+x^2)y' + xy - xy^2 = 0,$$
c) $$y' + y + (e^x + \sin x)y^3 = 0.$$

4.- Dar la solución general de la ecuación

$$y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y^{(2)} - 2y' + y = 0.$$

5.- Encontrar la solución general de

$$y''' - y = 2x^3 + 7.$$

6.- Resolver

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$

sobre el intervalo $[-1, 1]$ haciendo la substitución $x = \cos t$.

7.- Se considera la ecuación diferencial

$$x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0.$$

a) Mostrar que la substitución

$$t = \ln x$$

la transforma en una ecuación a coeficientes constantes.
b) Resolver de esta manera la ecuación propuesta.

8.- a) Mostrar que si $G(x)$ es una función integrable sobre $[a, b]$, entonces $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existe una única solución f de $y'' = G(x)$ tal que $f(a) = \alpha$ y $f(b) = \beta$.

b) Supongamos que $(b-a) = \dfrac{2\pi}{\omega} n$, n un entero; entonces existe una infinidad de soluciones f de la ecuación $y'' = -\omega^2 y$ tales que $f(a) = f(b) = \beta$.

c) $\forall \alpha, \beta$, existe una única solución f de $y'' = \lambda^2 y$ tal que $f(a) = \alpha$ y $f(b) = \beta$.

9.- Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

10.- Resolver el problema a valor inicial

$$y'' + y(y')^3 = 0,$$
$$y(\frac{1}{6}) = 1,$$
$$y'(\frac{1}{6}) = 2.$$

11.- Resolver la ecuación diferencial

$$g''(x) - 2xg'(x) - 4g(x) = 0.$$

buscando una solución de la forma

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

¿Cual es la solución más general de esta forma?
¿Cual es la solución de esta forma con $g(0) = 0$ y $g'(0) = 1$?

12.- Comprobar que cada una de las siguientes ecuaciones es homogénea y resolverla:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & x^2y' = 3(x^2+y^2)\arctan\dfrac{y}{x} + xy, & \text{(b)} & x^2y' - 3xy - 2y^2 = 0 \\ \text{(c)} & x\sin\dfrac{y}{x}\,y' = y\sin\dfrac{y}{x} + x, & \text{(d)} & xy' = \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$$

13.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

$$y' = (x+y)^2; \quad y' = \sin^2(x+y-1).$$

14.- Resolver las siguientes ecuaciones

a) $$y' = \frac{x+y+4}{x-y-6};$$

b) $$y' = \frac{x+y-1}{x+4y+2};$$

c) $$y' = \frac{x+y+4}{x+y-6}.$$

15.- Haciendo el cambio de variable $z = y/x^n$ y escogiendo un valor adecuado de n, mostrar que las ecuaciones diferenciales siguientes pueden transformarse en ecuaciones separadas y resolverlas:

a) $$y' = \frac{1-xy^2}{2x^2y};$$

b) $$y' = \frac{2+3xy^2}{4x^2y};$$

c) $$y' = \frac{y-xy^2}{x+x^2y}.$$

16.- Resolver la ecuación diferencial

$$y' = \frac{2y}{x} + \frac{x^3}{y} + x\tan\frac{y}{x^2}.$$

17.- Determinar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $$xy' + y = x^4y^3;$$

b) $$xy^2y' + y^3 = x\cos x;$$

18.- Una solución de $y'\sin 2x = 2y + 2\cos x$ permanece acotada cuando $x \to \pi/2$. Hallarla.

19.- Resolver la ecuación diferencial $xy' = 2x^2y + y\ln y$, utilizando la substitución $z = \ln y$.

20.- Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} & yy'' + (y')^2 = 0; & \text{(b)} & xy'' = y' + (y')^3; \\ \text{(c)} & y'' - ky^2 = 0; & \text{(d)} & x^2y'' = 2xy' + (y')^2. \end{array}$$

21.- Hallar la solución particular especificada para cada caso:

a) $(x^2 + 2y')y'' + 2xy' = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0;$

b) $yy'' = y^2y' + (y')^2, \quad y(0) = -\dfrac{1}{2}, \; y'(0) = 1;$

c) $y'' = y'e^y, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 2.$

22.- Una extensión natural a las ecuaciones de tipo lineal y tipo Bernouilli es la ecuación de Riccati

$$y' = a(x) + b(x)y + r(x)y^2.$$

En general esta ecuación no se puede resolver por métodos elementales. No obstante si se conoce una solución particular $y_1(x)$, la solución general tiene la forma

$$y(x) = z(x) + y_1(x),$$

donde $z(x)$ es la solución general de la ecuación de Bernouilli

$$z' - (q(x) + 2r(x)y_1(x))z = r(x)z^2.$$

Demostrar esto y calcular la solución general de la ecuación

$$y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5,$$

que tiene como solución particular evidente $y_1(x) = x$.
b) Mostrar que la solución general tiene la forma de una familia uniparamétrica de curvas

$$y = \frac{cf(x) + g(x)}{cF(x) + G(x)}.$$

23.- Aprovechando que $y = x$ es solución de cada una de las ecuaciones que se indican a continuación, hallar su solución general.

a) $y'' - \dfrac{x}{x-1}y' + \dfrac{1}{x-1}y = 0;$

b) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$

c) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0.$

24.- Comprobar que $y(x) = e^x$ es solución de

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$$

y hallar la solución general.

25.- Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas a coeficientes constantes

a) $y''' - 3y'' + 2y' = 0;$

b) $y''' - y = 0$

c) $y''' + y = 0$

d) $y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0;$

e) $y^{(5)} - 6y^{(4)} - 8y''' + 48y'' + 16y' - 96y = 0.$

26.- Determinar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

(a)	$y'' + 4y = \tan 2x$;	(b)	$y'' + y = \sec x \tan x$;
(c)	$(x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2-1)^2$	(d)	$x^2y - 2xy' + 2y = xe^{-x}$;
(e)	$y'' - 3y' + 2y = (1+e^{-x})^{-1}$;	(f)	$y^{(6)} - y = x^1 0.$

27.- La ecuación de Chebichef es

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0,$$

con n entero. Verificar que utilizando desarrollos en series de potencia, se puede encontrar una solución polinomial.

28.- Resolver la ecuación utilizando series alrededor de $x = 0$,

$$4x^2y'' - 8x^2y' + (4x^2+1)y = 0.$$

29.- Determine aproximadamente las soluciones, utilizando polígonos de Euler e Isoclinas de

a) $y' = \sin y + x$

b) $y' = y^2 + x^2$

c) $y' = -y + x^2$

d) $y' = \tan y.$

Capítulo II

Sistemas Diferenciales y Aplicaciones

II.1 Conceptos Básicos

Suponemos que el estudiante está familiarizado con los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y los fundamentos elementos del cálculo de funciones de varias variables.

Definición II.1.1.- Un sistema diferencial de talla n y orden m es una expresión de la forma

$$F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(m)}) = 0,$$

donde

$$F : \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{m+1 \text{ veces}} \to \mathbb{R}^n.$$

continua, $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ $k = 0, 1, \ldots, m$

Ejemplo

1.- El movimiento balístico se rige por el sistema de ecuaciones diferenciales de orden 2.

$$\ddot{x} = 0$$
$$\ddot{y} = g$$

donde x denota la componente horizontal y y la componente vertical. La variable independiente "t" no aparece de manera explícita.

Remarcas

1.- Como la imagen de la función F es $\mathbb{R}^n$, el sistema se lo expresa como

$$\begin{aligned} &F_1(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(m)}) = 0, \\ &F_2(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(m)}) = 0, \\ &\vdots \\ &F_n(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(m)}) = 0, \end{aligned}$$

donde cada $F_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{(m+1)n} \to \mathbb{R}$ es continua.

2.- Para evitarse análisis complicados en la resolución de dichas ecuaciones, se prefiere trabajar con sistemas explicitados, es decir, sistemas de la forma

$$x^{(m)} = F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(m-1)}).$$

Más todavía con sistemas de orden 1.

Proposición II.1.2.- *Todo sistema de ecuaciones diferenciales de orden $m \geq 1$, es equivalente a un sistema de primer orden.*

Demostración.-Sea

$$x^{(m)} == F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(m-1)}),$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ un sistema de orden m y talla n. Introduciendo las variables

$$\begin{aligned} y_1 &= x \\ y_2 &= \dot{x} \\ &\vdots \\ y_m &= x^{(m-1)} \end{aligned}$$

se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= y_3, \\ &\vdots \\ \dot{y}_{m-1} &= y_m, \\ \dot{y}_m &= F(t, y_1, y_2, \ldots, y_m), \end{aligned}$$

y denotando $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{nm}$ se tiene lo que se quiere.

□

Convención.-En lo que sigue el capítulo, solo se considerará sistemas de primer orden, a menos que se diga lo contrario.

Definición II.1.3.- Se dira que una función $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continuamente derivable es una solución del sistema de primer orden, de talla n,

$$\dot{x} = f(t, x),$$

si $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$, $\forall t \in I$.

Sistemas Autónomos

Definición II.1.4.- Se dira que un sistema diferencial de talla n es autónomo si se puede escribir de la forma

$$\dot{x} = f(x); \tag{SDA}$$

es decir, la variable independiente t no aparece explícitamente en el sistema diferencial.

Proposición II.1.5.- *Todo sistema diferencial de primer orden, es equivalente a un sistema diferencial autónomo.*

Demostración.- Sea

$$\dot{x} = F(t, x),$$

un sistema diferencial no autónomo, planteando

$$x_{n+1} = t,$$

obtenemos esl sistema diferencial autónomo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x_{n+1}, x) \\ \dot{x}_{n+1} &= 1; \end{aligned}$$

y definiendo el vector $X = \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$, el sistema precedente lo escribimos como

$$\dot{X} = F(X) = \begin{pmatrix} f(x_{n+1}, x) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Definición II.1.6.- Cuando se trabaja con sistemas diferenciales autónomos (SDA), es costumbre llamar a $\mathbb{R}^n$ **espacio fase** y las coordnedas de x, x_i **fase**.

Definición II.1.7.- Si $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ es una solución del (SDA), la imagen de φ, $\varphi(I)$, se llama **trayectoria** y en algunos casos **linea de flujo**.

Remarca.- Se designa t la variable independiente haciendo en general referencia al tiempo. Una solución describirá por consiguiente la ley de movimiento de un objeto, mientras que la trayectoria es la traza dejada por el movimiento del objeto. La única información que puede proporcionar una trayectoria, es las posiciones por donde ha estado el objeto y no el momento exacto. Sin embargo, a pesar de esta limitación se puede obtener informaciones respecto a las soluciones conociendo las trayectorias. En la graficación de las trayectorias, es corriente indicar el sentido del movimiento colocando una flecha para indicar. Ver figura II.1.

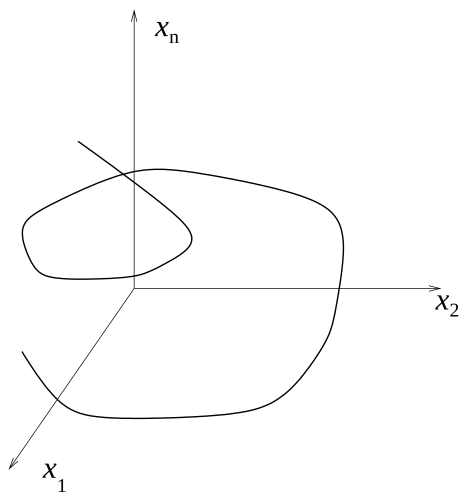


Figura II.1.- Trayectoria de una solución

Consideremos el sistema diferencial autónomo

$$\dot{x} = f(x),$$

y una solución $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$. El vector tangente, (en física vector velocidad), en $t = t_0$ es $\varphi'(t_0) \in \mathbb{R}^n$. Ahora bien

$$\varphi'(t_0) = f(\varphi(t_0)),$$

de donde a la trayectoria en el punto $x^* = \varphi(t_0)$ se le puede asociar el vector tangente $f(x^*)$. Ver figura II.2

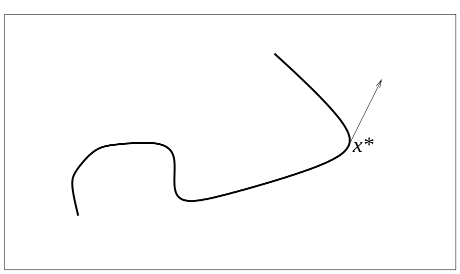


Figura II.2.- Vector Tangente

Remarcamos inmediatamente que el lado derecho del (SDA) induce un campo de vectores tangentes (a las trayectorias) del Sistema Diferencial Autónomo, que lo denotamos

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Es costumbre representar un campo de vectores en una gráfica, asociando a cada $x \in \mathbb{R}^n$ del espacio de fases una flecha que corresponde el vector de la imagen. Ver figura II.3.

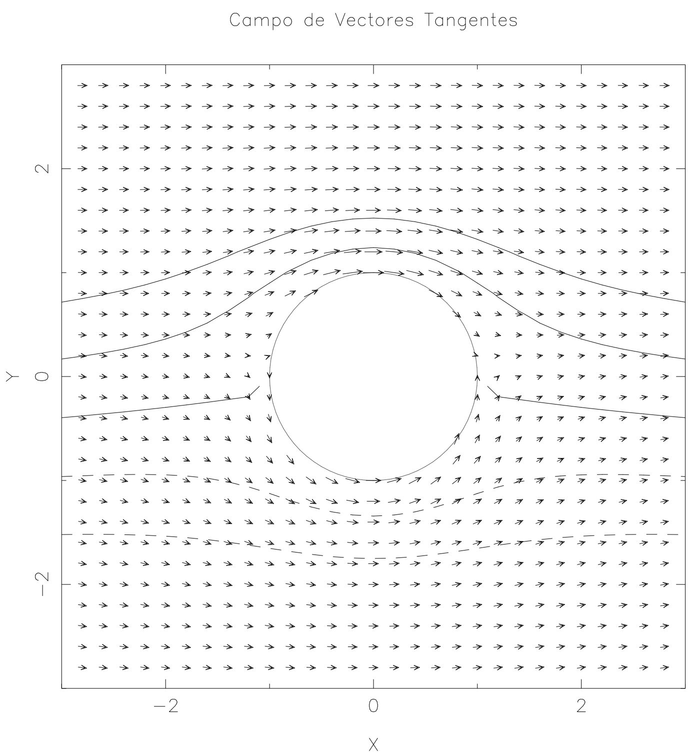


Figura II.3.- Representación de un Campo de Vectores

Tipos de Soluciones

Consideremos el sistema diferencial autónomo de talla n

$$\dot{x} = F(x),$$

y $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una solución del sistema.

Definición II.1.8.- Se dirá que φ es una solución estacionaria si $\varphi(t) = x^* \in \mathbb{R}^n$ para todo $t \in I$.

Definición II.1.9.- Se dirá que φ es una solución periódica si existe $T > 0$ tal que $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ para todo T, si es el caso T se llama periodo.

Proposición II.1.10.- *Sea $\dot{x} = F(x)$ un sistema autónomo, entonces:*

a) φ es una solución estacionaria, si y solamente si la trayectoria de φ se reduce a un punto en el espacio de fases, si y solamente si $F(\varphi(t)) = 0$.

b) φ es una solución periodica no estacionaria si y solamente si la trayectoria de φ es una curva cerrada y F no se anula nunca sobre la trayectoria.

Remarca.- La proposición precedente para encontrar soluciones estacionarias nos da un medio algebraico, resolver $F(x) = 0$ y un medio gráfico viendo las trayectorias que se reducen a un punto. En las soluciones estacionarias, tenemos un medio gráfico que el estudio de las trayectorias cerradas.

Ahora bien, poder decidir si una curva es cerrada o no, es en general bastante complicado si $n > 2$. En el plano es posible en general.

Por otro lado, un gran número de las aplicaciones de los sistemas diferenciales autónomos es de talla 2. Por lo que vale la pena estudiarlos.

Sistemas Autónomos de Talla 2

Aparte de los sistemas autónomos de talla 2

$$\dot{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right),$$

es frecuente estudiar las ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}),$$

donde x depende de t como un sistema autónomo de talla 2. Con tal motivo se plantea

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \\ x_2 &= \dot{x}; \end{aligned}$$

el sistema diferencial autónomo equivalente está dado por

$$\dot{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ f(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

y las componentes del plano de fases son $x_1 = x$ (la posición) y $x_2 = \dot{x}$ (la velocidad).

Volvamos al sistema

$$\dot{x} = F(x),$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$. $F(x)$ induce un campo de vectores tangentes a las trayectorias. Aprovechando la relación

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1},$$

vista en Cálculo I, y si $F(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$, las trayectorias son los grafos de las soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{F_2(x_1, x_2)}{F_1(x_1, x_2)},$$

o bien los grafos de las soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{F_1(x_1, x_2)}{F_2(x_1, x_2)},$$

Acabamos de formular un método que nos determina las trayectorias, sin necesidad de conocer las soluciones del sistema diferencial autónomo.

Remarca.-Una familia de curvas en $\mathbb{R}^2$ pueden ser las trayectorias de muchos sistemas diferenciales, pero el campo de pendientes de las curvas es único.

Ejemplos

2.- **(Predador-Presa).** El comportamiento de dos poblaciones de animales en un ambiente aislado en el que una de las poblaciones son por ejemplo conejos y la otra población son lobos se puede modelar por el sistema diferencial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\alpha - \beta y), \\ \dot{y} &= y(\gamma x - \delta) \end{aligned}$$

donde $x(t)$ represanta la población de conejos en el instante t e $y(t)$ representa la población de lobos en el instante t. Las trayectorias satisfacen la ecuación diferencial

$$y' = \frac{y(\gamma x - \delta)}{x(\alpha - \beta y)}$$

que es una ecuación diferencial separable. Resolviendo la ecuación obtemos como solución general (en forma implícita)

$$\gamma x - \delta \ln x = \alpha \ln y - \beta y + C. \tag{II.1.1}$$

Las trayectorias del sistema diferencial son las curvas de nivel de (II.1.1). En la figura II.4 están graficadas las curvas de nivel de (II.1.1) para $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$ y $\delta = 3$. Observamos que las curvas de nivel son curvas cerradas, por lo que deducimos que el comportamiento de estas poblaciones es cíclico.

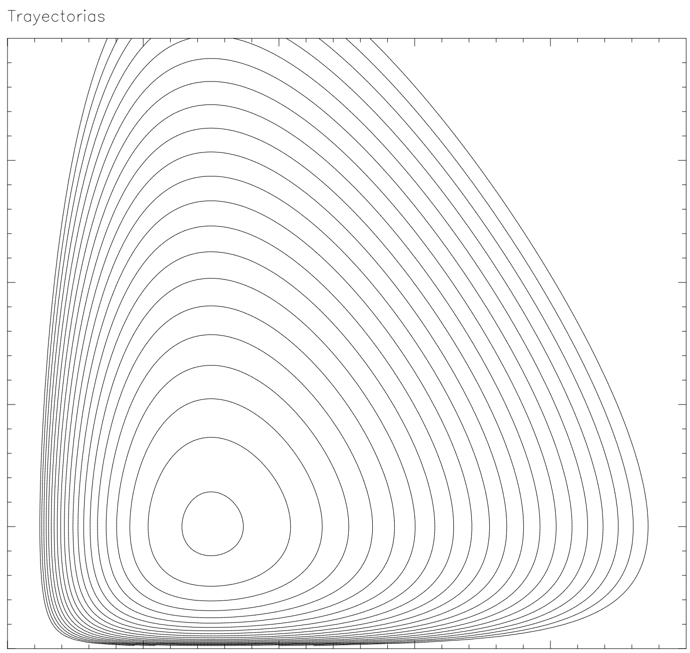


Figura II.4.- Trayectorias del Sistema Diferencial

II.2 Aplicaciones

Aplicaciones Geométricas

Veremos, cómo la utilización de conceptos relacionados a las ecuaciones y sistemas diferenciales permite la resolución de problemas relacionados a familias de curvas, en particular curvas uniparamétricas, del plano.

Definición II.2.1.- Una familia de curvas uniparamétricas, es una familia de curvas si existe una función $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de manera que cada curva es el lugar geométrico de los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación

$$F(x, y, c) = 0,$$

dejando $c \in \mathbb{R}$ fijo. La ecuación se llama ecuación general de la familia de curvas y c es el parámetro.

Damos el siguiente resultado sin demostración.

Proposición II.2.2.- *Una familia de curvas es uniparamétrica, si y solamente si existe una función continua* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, *de manera que las funciones* $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *definidas por*

$$\varphi_\alpha(t) = f(t, \alpha),$$

sean parametrizaciones de cada una de las curvas de la familia.

Ejemplo

1.- Las circunferencias centradas en el origen forman una familia uniparamétrica. En efecto, la ecuación general es

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

las parametrizaciones de las circunferencias centradas en el origen están dadas por

$$\begin{aligned} x(t) &= r\cos t \\ y(t) &= r\sin t. \end{aligned}$$

Remarca.- La solución general de una ecuación diferencial de primer orden que satisface una condición de Lipschtiz es una familia uniparamétrica de curvas. Asimismo, las trayectorias pueden de un sistema diferencial autónomo forman una familia uniparamétrica, si el sistema satisface una condición de Lipschtiz; las soluciones del sistema vienen a ser las parametrizaciones de las curvas.

Proposición II.2.3.- *Para toda familia uniparamétrica existe una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ cuya soluci'on general son las curvas de la familia uniparamétrica. Además también existe un sistema diferencial autónomo cuyas trayectorias son las curvas de la familia uniparamétrica.*

Demostración.- Sea $F(x, y, c) =$ la ecuación general de la familia de curvas uniparamétrica. Derivando respecto a x, se obtiene,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, c) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, c)y' = 0.$$

Por consiguiente, y', c dejando x, y fijos, satisfacen el sistema de ecuaciones (algebraicas)

$$\begin{aligned} F(x, y, c) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, c) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, c)y' &= 0, \end{aligned}$$

de donde es posible obtener y' en función de x e y, es decir

$$y' = f(x, y).$$

Para el sistema, es suficiente considerar $g_1(x, y)$ y $g_2(x, y)$ de manera que

$$f(x, y) = \frac{g_2(x, y)}{g_1(x, y)},$$

por lo que las curvas son trayectorias del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g_1(x, y) \\ \dot{y} &= g_2(x, y) \end{aligned}$$

□

Remarca.-Para la existencia de $f(x, y)$ se deberá considerar hipótesis suplementarias de $F(x, y, c)$.

Ejemplo

2.- La familia de parábolas de vértice el origen y eje de simetría el eje y, satisface la ecuación general

$$y = cx^2,$$

derivando, se obtiene

$$y' = 2cx,$$

despejando c de la ecuación general obtenemos la ecuación diferencial

$$y' = \frac{2y}{x}.$$

Condiciones para que una familia de curvas sea uniparamétrica

Hemos visto que para que una familia de curvas sea uniparamétrica es necesario la existencia de una ecuación general. Sin embargo encontrar dicha ecuación es en general una tarea complicada.

Ahora bien, utilizando resultados sobre las trayectorias y soluciones de ecuaciones y sistemas diferenciales, uno se puede dar cuenta si una familia es uniparamétrica o no. En efecto, supongamos que tenemos una familia de curvas uniparamétrica y sea

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = F(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}$$

un sistema autónomo cuyas trayectorias son las curvas de la familia en cuestión. En general las funciones $F(x,y)$ tienen a lo más un número finito de soluciones del sistema $F(x,y) = (0,0)$ en cada región acotada, para efectos prácticos consideramos regiones rectangulares de la forma $[a,b] \times [c,d]$.

Por otro lado observamos que si en el punto (x,y), $F(x,y) \neq 0$, solo pasa por este punto una trayectoria. Si $F(x,y) = 0$, (x,y) es un punto estacionario en que enventualmente pueden confluir y o emerger varias trayectorias. En consecuencia, si en una región rectangular existen una infinidad de puntos en los cuales pasan diferentes curvas, esta familia no es uniparamétrica.

Ejemplos

3.- La familia de circunferencias del plano, no es una familia uniparmétrica porque por cada punto del plano pasa una infinidad de circunferencias.

4.- La familia de circunferencias de centro en el eje x y que pasan por el origen, ver figura II.5, puede ser una familia uniparmétrica, solo existe un punto, el origen, por el cual pasa una infinidad de circunferencias, por los otros, pasa exactamente una circunferencia.

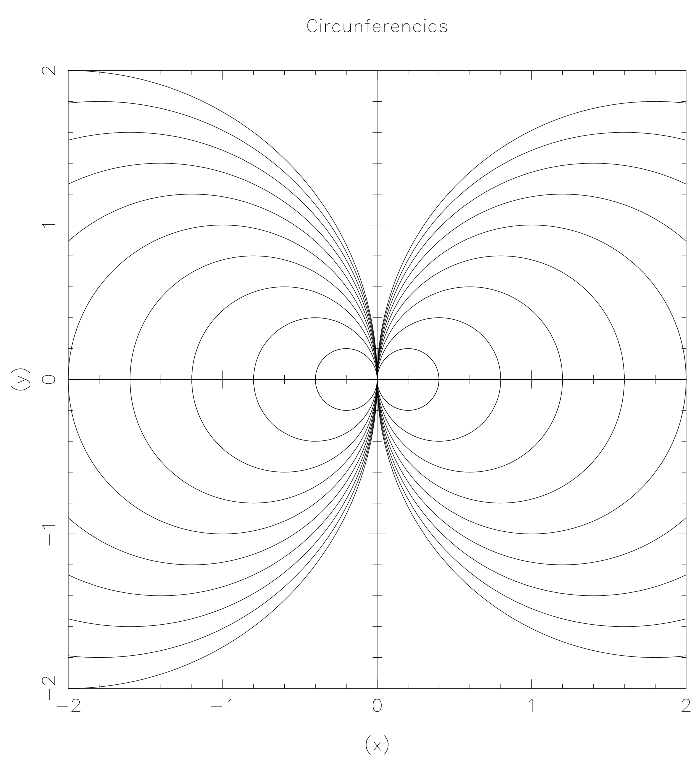


Figura II.5.- Familia de Circunferencias

Ahora bien, esta es una familia uniparamétrica, cuya ecuación general es facilmente deducible y es

$$(x-r)^2+y^2-r^2=0,$$

o bien

$$x^2+y2-2rx=0.$$

Determinemos la ecuación diferencial y es sistema diferencial. Se tiene

$$r=\frac{x^2+y^2}{x},$$

derivando obtenemos

$$0=\frac{2x^2+2yy'x-x^2-y^2}{x^2},$$

despejamos y', se obtiene

$$y'=\frac{y^2-x^2}{2xy},$$

de donde el sistema estará dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}&=2xy\\ \dot{y}&=y^2-x^2\end{aligned}$$

Remarca.- Es importante encontrar un sistema diferencial autónomo cuyas trayectorias sean las curvas de una familia de curvas uniparamétrica, porque nos permite determinar un campo de vectores tangentes. Y manipular vectores (tangentes) es mucho más sencillo que manipular las curvas.

Familias de curvas que forman un ángulo dado con una familia de curvas dada

Consideremos el siguiente problema: "Dada una familia de curvas uniparamétrica, encontrar una familia de curvas que forme un ángulo θ". Interpretemos lo que significa este problema. El concepto de ángulo es un concepto para rectas, que se generaliza a las curvas, definiendo el angulo entre dos curvas, como el ángulo de los vectores tangentes, ver figura II.6.

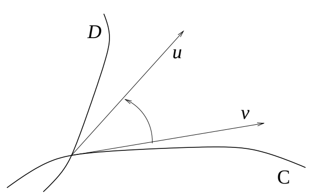


Figura II.6.- Angulo entre dos curvas

Por consiguiente, determinamos primero el campo de vectores tangentes a la familia de curvas dada, ya sabemos cómo, sea

$$v(x,y)=\begin{pmatrix}v_1(x,y)\\ v_2(x,y)\end{pmatrix}$$

el campo de vectores dados. Obtenemos el campo $u(x,y)$ de la familia de curvas que forman el ángulo dado, rotando por un ángulo θ, el campo $v(x,y)$, es decir

$$\begin{pmatrix}u_1(x,y)\\ u_2(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1(x,y)\\ v_2(x,y)\end{pmatrix}.$$

El siguiente paso es considerar el sistema autónomo

$$\dot{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}u_1(x,y)\\ u_2(x,y)\end{pmatrix}$$

y determinar las trayectorias, que ya sabemos hacer.

Ejemplo

5.- Consideremos nuevamente la familia de circunferencias de centro en el eje x y que pasan por el origen y encontremos la familia de curvas ortogonales a esta familia de circunferencias. En el ejemplo 4, hemos encontrado un campo de vectores tangentes, dado por

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}.$$

Aplicando una rotación de 90 grados obtenemos

$$u(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix},$$

de donde, las curvas ortogonales, son trayectorias del sistema diferencial

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

Determinamos las trayectorias, resolviendo la ecuación diferencial

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2},$$

cuya solución general es

$$x^2 + y^2 - cy = 0,$$

que es la ecuación general de una familia de circunferencias de centro el eje y y que pasan por el origen.

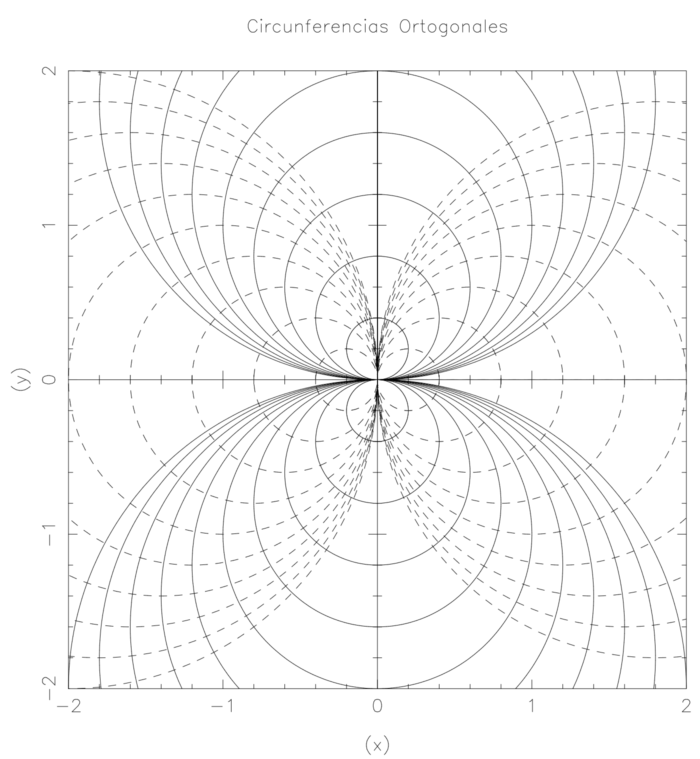


Figura II.7.- Curvas ortogonales

Problemas de Persecución

Los problemas de persecución, son interesantes porque constituyen un buen ejercicio mental, desde la comprensión del fenómeno, la formulación matemática del modelo y la misma solución.

Un ejemplo trabajado

En un momento dado, un perro se encuentra a una distancia a a la derecha de un gato, al que comienza a perseguirlo. El gato se escapa a un árbol que se encuentra a una distancia h en dirección de su frente. Suponiendo que el gato corre con una rapidez u inferior a la rapidez v del perro, se tiene las siguientes preguntas.

a) ¿Cual debe ser la distancia máxima para que el gato no sea atrapado por el perro?

En caso que el perro atrape al gato,

b) ¿Cual será el tiempo que transcurre para que el gato sea atrapado?
c) ¿Qué longitud habra recorrido el perro para atrapar al gato?

Para resolver el problema, hacemos una representación de las posiciones del perro y el gato en el plano cartesiano. Por consiguiente, la posición del gato y el perro respctivamente en el momento inicial, están dadas por $(0,0)$ y $(a,0)$ respectivamente. Las coordenadas del árbol son $(0,h)$.

El siguiente paso es modelar la persecución, para eso, denotamos por $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}^2$ y $p:[0,+\infty)\to\mathbb{R}^2$ las leyes de movimiento del gato y el perro respectivamente. Puesto que el gato se dirige al árbol, la ley de moviento para el gato será

$$g(t)=\begin{pmatrix}0\\ ut\end{pmatrix}.$$

La parte más interesante del problema, es la formulación matemática de la ley de movimiento del perro. Para tal efecto, debemos determinar la manera como persigue el perro al gato. Institivamente en cada instante el perro buscará el camino más corto que le permita atrapar al gato. Intuitavemente sabemos que el camino más corto que une dos puntos es el segmento que une estos dos puntos. Por consiguiente la velocidad del perro, en el instante t tendrá la misma dirección del vector cuyo origen es la posición del perro y su extremidad es la posición del gato en el instante t. Ver figura II.8. Por lo tanto, la velocidad del perro será

$$\dot p(t)=\frac{v}{\left\|\overrightarrow{p(t)g(t)}\right\|}\overrightarrow{p(t)g(t)}.$$

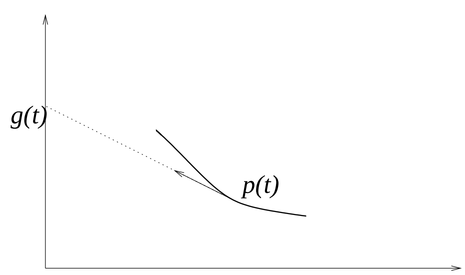


Figura II.8.- Movimiento del perro

Expresando en coordenadas, obtenemos el sistema diferencial de primer orden, que describe el movimiento del perro,

$$\dot{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}=\frac{v}{\sqrt{x^2+(ut-y)^2}}\begin{pmatrix}-x\\ ut-y\end{pmatrix}.$$

Para responder las interrogantes planteadas, podemos resolver el sistema, lo que por el momento no sabemos todavía hacer, o bien determinar la trayectoria del perro.

Observamos que el sistema obtenido no es autónomo, porque aparece explicitamente la variable t; sin embargo podemos suponer que t depende de x, lo que da

$$y'=\frac{ut-y}{-x},$$

obteniendo así, la ecuación de primer orden

$$xy' = y - ut.$$

Esta ecuación no la podemos resolver tal como está planteada, por que tenemos 2 funciones incognitas. Derivamos para obtener

$$xy'' = -ut',$$

pero $t' = 1/\dot{x}$, de donde

$$\begin{aligned} xy'' &= -ut' \\ &= \frac{-u}{\dot{x}} \\ &= \frac{u}{v}\frac{\sqrt{x^2 + (ut-y)^2}}{x} \\ &= \frac{u}{v}\frac{\sqrt{x^2 + x^2y'^2}}{x}; \end{aligned}$$

planteando $r = u/v$ y viendo la figura II.8 es razonable suponer que $x \geq 0$, por lo que la trayectoria es la solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$xy'' = r\sqrt{1 + y'^2},$$

que satisface los valores iniciales

$$y(a) = 0, \quad y'(a) = 0.$$

Planteando $z = y'$, obtenemos la ecuación diferencial de tipo separable

$$z' = r\frac{\sqrt{1 + z'^2}}{x},$$

que al resolverla, se obtiene

$$z + \sqrt{1 + z^2} = Cx^r.$$

Ahora bien, $z(a) = y'(a) = 0$, de donde $C = a^{-r}$. Despejando z de la expresión precedente, se tiene

$$z = \frac{1}{2}\left(a^{-r}x^r - a^r x^{-r}\right).$$

Integrando, se obtiene

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{a^{-r}x^{r+1}}{r+1} - \frac{a^r x^{1-r}}{1-r}\right) + D.$$

Utilizando el hecho que $y(a) = 0$, se tiene

$$D = \frac{ar}{1 - r^2}.$$

En la figura II.9, se tiene graficada la trayectoria para $a = 100$, $u = 1$ y $v = 2$.

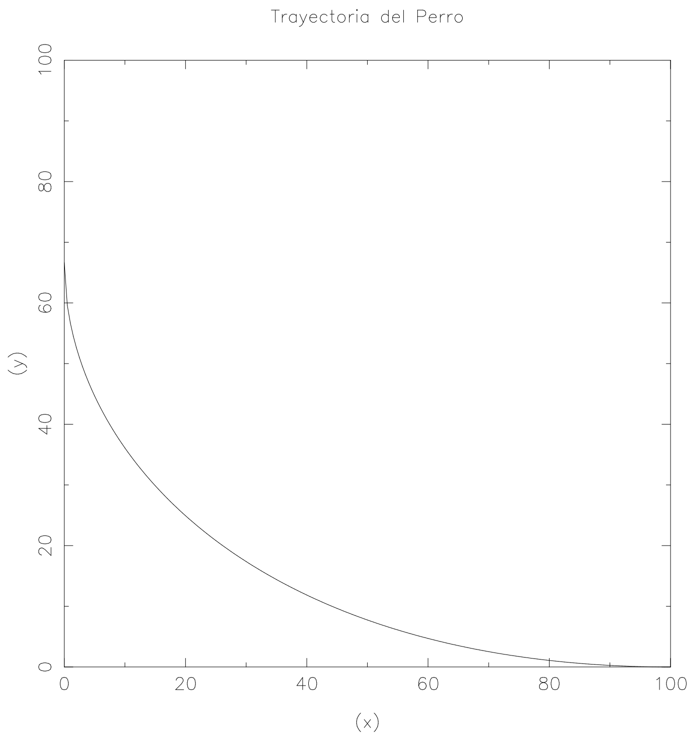


Figura II.9.- Trayectoria del Perro

Obseervamos que para $x = 0$, se tiene

$$y = D = \frac{auv}{v^2 - u^2}.$$

Por lo tanto, para que el gato no sea atrapado, la distancia máxima a la que se debe encontrar el árbol debe ser

$$\frac{auv}{v^2 - u^2}.$$

Si el gato es atrapado, lo será en el punto $(0, auv/(v^2 - u^2))$, de donde el tiempo de persecusión será

$$T = \frac{av}{v^2 - u^2},$$

y la longitud que habrá recorrido el perro será

$$L = \frac{av^2}{v^2 - u^2}.$$

II.3 Sistemas Diferenciales Lineales

Un sistema diferencial lineal de talla n, es un sistema diferencial que puede expresarse como

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t)\\
\dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t)\\
&\vdots\\
\dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t)
\end{aligned}$$

donde $a_{ij}, b_i : I \to \mathbb{R}$ continuas.

Por cuestiones de comodidad en el manejo de símbolos, el mismo sistema se puede expresar de manera matricial, como

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \tag{L}$$

donde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Se dira que un sistema diferencial lineal es homogéneo si $b(t) = 0$; es decir si el sistema es de la forma

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{LH}$$

Sistemas Diferenciales Homogéneos

Teorema II.3.1.- *La solución general del sistema diferencial linal homogéneo de talla n*

$$\dot{x} = A(t)x,$$

donde $A(t)$ es una matriz cuyos cooeficientes son funciones continuas, es un subespacio vectorial de dimensión n.

Demostración.- Ejercicio para la parte de subespacio vectorial, aceptamos que la dimensión es n.

Por consiguiente, para conocer la solución general de un sistema diferencial lineal homogéneo, es suficiente conocer n soluciones linealmente independientes. A una tal familia $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ de soluciones linealmente independientes, se llama sistema fundamental de soluciones.

Consecuencia del Algebra Lineal, se tiene la siguiente proposición que da criterios para decidir si un sistema de soluciones es un sistema fundamental.

Proposición II.3.2.- Sea $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ un sistema de soluciones del sistema diferencial lineal

$$\dot{x} = A(t)x,$$

entonces $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ es un sistema fundamental, si y solamente si

$$R(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \end{pmatrix}$$

es una matriz inversible, si y solamente si

$$\det R(t) \neq 0.$$

Definición II.3.3.- Cuando $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ es un sistema fundamental del sistema

$$\dot{x} = A(t)x,$$

la matriz $R(t)$ se llama matriz resolvente del sistema diferencial lineal homogéneo.

Proposición II.3.4.- *Si $R(t)$ es una matriz resolvente del sistema diferencial lineal de talla n*

$$\dot{x} = A(t)x,$$

entonces $R(t)$ verifica:

i) $R(t)$ es inversible.

ii) Toda solución $\varphi(t)$ del sistema se escribe de manera única como

$$\varphi(t) = R(t)C,$$

donde $C \in \mathbb{R}^n$.

iii) $R(t)$ verifica

$$\dot{R}(t) = A(t)R(t).$$

Demostración.- El punto i) es consecuencia de su definición.
ii) Las columnas de $R(t)$ forman un sistema fundamental de soluciones, del sistema diferencial lineal. Denotemos por $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ las columnas de $R(t)$. Por lo tanto, toda solución φ se escribe de manera única como

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t),$$

introduciendo la multiplicación matricial, se obtiene

$$\varphi(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n \end{pmatrix}}_{R(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{C}.$$

iii) Se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{R}(t) &= \begin{pmatrix} \dot\varphi_1(t) & \dot\varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A(t)\varphi_1(t) & A(t)\varphi_2(t) & \cdots & A(t)\varphi_n(t) \end{pmatrix} \\
&= A(t) \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \end{pmatrix} \\
&= A(t)R(t).
\end{aligned}$$

□

Corolario II.3.5.- *El problema a valor inicial*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x \\ x(t_0) &= x^* \end{aligned}$$

tiene solución única.

Demostración.- Sea $R(t)$ la resolvente del sistema, se tiene

$$x^* = R(t_0)C,$$

y como $R(t_0)$ es inversible, C existe y es único.

□

Sistemas Diferenciales no Homogeneos

Consideremos nuevamente el sistema lineal

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \tag{L}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, A y b continuas. A este sistema le asociamos el sistema linal homogeneo

$$\dot{x} = A(t)x \qquad (LH).$$

Al igual que las ecuaciones diferenciales lineales del capítulo I, se tiene:

Proposición II.3.6.- *Sea ψ una solución particular de (L) y φ cualquier solución de (LH), entonces*

$$\psi + \varphi$$

es una solución de (L).

Demostración.- Ejercicio.

Proposición II.3.7.- *Sea ψ una solución particular de (L), entonces cualquier solución de (L) es de la forma*

$$\psi + \varphi,$$

donde φ es solución de (LH).

Demostración.- Ejercicio.

Por lo tanto, para conocer la solución general de (L), es suficiente conocer una solución particular de (L) y la solución general de (LH). Este resultado lo expresamos, mediante la siguiente regla memotécnica.

$$\boxed{\text{Solución general de (L)}} = \boxed{\text{Solución general de (LH)}} + \boxed{\text{Una solución particular de (L)}}$$

Proposición II.3.8.- *El problema a valor inicial*

$$\begin{aligned} y' &= a(t)y + b(t), \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

tiene solución única.

Demostración.- Ejercicio.

Determinación de una solución particular de (L)

Al igual que en el capítulo precedente, se puede determinar una solución particular al tanteo, o bien utilizando el método de variación de constantes.

Sea $R(t)$ la resolvente del sistema (LH), y suponemos que la solución particular buscada es de la forma

$$\psi(t) = R(t)C(t),$$

derivando, se tiene

$$\dot{\psi}(t) = \dot{R}(t)C(t) + R(t)\dot{C}(t) = A(t)R(t)C(t) + R(t)\dot{C}(t) = A(t)\psi(t) + b(t),$$

de donde

$$R(t)\dot{C}(t) = b(t),$$

por lo que

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} R^{-1}(s)b(s)\,ds.$$

Ejemplo

1.- Consideremos el sistema diferencial de talla 2

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \sin t \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned}$$

Expresando de manera matricial, se tiene

$$\dot{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se puede verificar que

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

es una matriz resolvente del sistema lineal homogéneo asociado. Aplicando variación de constantes, se obtiene

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema lineal para $\dot{c}_1$ y $\dot{c}_2$, se tiene

$$\dot{c}_1 = \sin t \cos t, \quad c_2 = -\sin^2 t,$$

lo que da

$$c_1(t) = \frac{1}{2}\sin^2 t, \quad c_2(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t.$$

Por lo tanto, la solución general será

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{2}\sin^2 t \cos t - (\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t)\sin t, \\ y(t) &= c_1 \sin t - c_2 \sin t + \frac{1}{2}\sin^3 t + (\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t)\cos t. \end{aligned}$$

Remarca.- Para poder realizar el método de variación de constantes hemos supuesto la existencia de la matriz resolvente, por consiguiente la existencia de un sistema fundamental de soluciones. Sin embargo, cuando la matriz $A(t)$ continua es arbitraria, no existe un método que permita determinar la resolvente.

Sistemas Lineales a Coeficientes Constantes

Consideremos el sistema lineal de talla n

$$\dot{x} = Ax,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

El caso no homogéneo ha sido ya visto más arriba.

Cuando $n = 1$, se tiene la ecuación lineal de primer orden $\dot{x} = ax$, cuya solución general es

$$x(t) = ce^{ta} = e^{ta}c,$$

por lo que $R(t) = e^{ta}$. Por otro lado, recordemos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

La definición mediante una serie de la función e^x, permite generalizar la función exponencial para matrices de la siguiente manera.

Definición II.3.9.- Sea A una matriz $n \times n$ a coeficientes reales, se define

$$e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k.$$

Aúnque el cálculo de e^A parezca muy complicado, existen tipos de matrices en las que el cálculo es inmediato y sencillo.

Ejemplos

2.- Sea D una matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_0 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

la utilización de la definición de la exponencial de una matriz, permite llegar a

$$e^D = \begin{pmatrix} e_1^\lambda & 0 & & \\ 0 & e_0^\lambda & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & 0 & e_n^\lambda \end{pmatrix}$$

que es una matriz diagonal, cuyos coeficientes de la diagonal son las exponenciales de los coeficientes de la matriz diagonal D.

3.- Si A es una matriz diagonalizable; es decir que existe una matriz T inversible tal que

$$A = TDT^{-1},$$

donde D es una matriz diagonal. Se tiene

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots \\ &= I + TDT^{-1} + \frac{1}{2}TD\underbrace{T^{-1}T}_{=I}DT^{-1} + cdots \\ &= TIT^{-1} + TDT^{-1} + \frac{1}{2}TD^2T^{-1} + \cdots \\ &= T\left(I + D + \frac{1}{2}D^2 + \cdots\right)T^{-1} \\ &= Te^DT^{-1}. \end{aligned}$$

Por el ejemplo 3, observamos que el cálculo de la exponencial de una matriz diagonalizable es sencillo a condición de conocer la matriz diagonal a la que es semejante.

Repaso de Algebra Lineal

Sea A una matriz de $n \times n$, supongamos que sea diagonalizable, es decir que existen D diagonal y T inversibles tales que

$$A = TDT^{-1},$$

denotando $T = (\,T_1 \quad T_2 \quad \cdots \quad T_n\,)$ por sus columnas, se tiene

$$\begin{aligned} A\,(\,T_1 \quad T_2 \quad \cdots \quad T_n\,) &= (\,T_1 \quad T_2 \quad \cdots \quad T_n\,) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \\ (\,AT_1 \quad AT_2 \quad \cdots \quad AT_n\,) &= (\,\lambda_1 T_1 \quad \lambda_2 T_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\,)\,. \end{aligned}$$

Como las T es inversible, las columnas T_k son vectores no nulos, de donde los T_k son vectores propios respecto a λ_k valor propio de A. Más todavia los T_k forman una base de $\mathbb{R}^n$. Hemos mostrado:

Proposición II.3.10.- *Una matriz A es diagonalizable, si y solamente si de los vectores propios de A se puede formar una base de $\mathbb{R}^n$.*

Remarca.- La determinación de valores propios de una matriz A pasa por la determinación de las raices del polinomio característico de A

$$P_A(x) = \det(xI - A).$$

La Resolvente de un Sistema Lineal a Coeficientes Constantes

Teorema II.3.11.- *Consideremos el sistema lineal homogéneo a coeficientes constantes*

$$\dot{x} = Ax.$$

Entonces

$$R(t) = e^{tA}$$

es una resolvente del sistema; es decir la solución general es

$$x(t) = e^{tA}C.$$

Demostración.- Es suficiente ver que

$$\dot{R}(t) = A(t)R(t),$$

y que $R(t) = e^{tA}$ es inversible. En efecto

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^kA^k\right)^{\cdot} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(t^k)^{\cdot}A^k\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k!}t^{k-1}A^k\\ &= A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}A^{k-1}\\ &= A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^kA^k = Ae^{tA}.\end{aligned}$$

Si $AB = BA$ se tiene $e^{A+B} = e^Ae^B$, demostración que dejamos como ejercicio. Por lo tanto

$$I = e^0 = e^{tA-tA} = e^{tA}e^{-tA},$$

de donde e^{tA} es inversible.

□

Ejemplo

4.- Consideremos el sistema lineal a coeficientes constantes

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + 2y\\ \dot{y} &= -x + 4y.\end{aligned}$$

Escrito de manera matricial, se tiene

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Determinemos los valores propios de la matriz, el polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3),$$

Por lo tanto, 2 y 3 son valores propios de la matriz asociada al sistema. Determinemos los vectores propios. Para $\lambda = 2$, se tiene la ecuación

$$-x + 2y = 0$$

planteando $y = 1$, se tiene $x = 2$. Para $\lambda = 3$, se tiene la ecuación

$$-2x + 2y = 0,$$

que da facilmente $x = 1$, $y = 1$. Por lo tanto

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La solución general del sistema está dada por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

que desarrollando, se obtiene

$$\begin{aligned} x(t) &= 2(c_1 - c_2)e^{2t} + (2c_2 - c_1)e^{3t}, \\ y(t) &= (c_1 - c_2)e^{2t} + (2c_2 - c_1)e^{3t}. \end{aligned}$$

Variante del Método de la Exponencial

Hemos visto que la determinación de la exponencial de una matriz (diagonalizable) pasa por la determinación de los valores propios y la determinación de la matriz inversible T. Ahora bien, calcular vectores propios no es una tárea sencilla y simple, lo mismo que invertir una matriz. Por otro lado, las matrices no siempre son diagonalizables, sin que eso no signifique no exista la exponencial.

A continuación formularemos un procedimiento que nos permita calcular la solución general de un sistema lineal homogéneo a coeficientes constantes. Consideremos el sistema

$$\dot{x} = Ax,$$

Por el momento supondremos que A es diagonalizable en los reales y que los valores propios son diferentes. Por consiguiente

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_0 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} T^{-1}.$$

La solución general del sistema estará dada por

$$x(t) = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & & \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T^{-1}C.$$

Ahora bien, $T^{-1}C$ sigue siendo un vector constante, que lo denotamos una vez más C; por consiguiente

$$x(t) = T \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix},$$

por otro lado, los coeficientes de T pueden ser vistos como constantes, de donde la solución puede escribirse como

$$x(t)=\begin{pmatrix} c_{11}e^{\lambda_1 t} & c_{12}e^{\lambda_2 t} & \cdots & c_{1n}e^{\lambda_n t}\\ c_{21}e^{\lambda_1 t} & c_{22}e^{\lambda_2 t} & \cdots & c_{2n}e^{\lambda_n t}\\ \vdots & & & \\ c_{n1}e^{\lambda_1 t} & c_{n2}e^{\lambda_2 t} & \cdots & c_{nn}e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}$$

Remarcamos que la solución está expresada en función de n^2 constantes, como la solución general es de dimensión n, solo se requiere n constantes, por lo que n^2-n deben ser expresadas en función de n constantes. Esto se obtiene remplazando en el sistema y obteniendo ecuaciones lineales que deberán ser resueltas.

Como la determinación de los λ_i pasa por la solución del polinomio característico de la matriz A y las raices no siempre son diferentes y no siempre son reales, podemos afinar nuestro resultado sobre la solución de la siguiente manera.

Teorema II.3.12.- *Consideremos el sistema diferencial lineal a coeficientes constantes*

$$\dot{x}=Ax.$$

Sean $r_1,\ldots,r_m$ las raices diferentes del polinomio característico de la matriz A y cuya factorización está dada por

$$P_A(\lambda)=(\lambda-r_1)^{n_1}(\lambda-r_2)^{n_2}\cdots(\lambda-r_m)^{n_k};$$

y consideremos la familia de funciones $\xi_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$ conformada por:

si $r_j\in\mathbb{R}$, r_j contribuye a la familia con

$$e^{rx},\ xe^{rx},\ldots,x^{n_j-1}e^{rx};$$

si $r_j=\alpha+i\beta$ con $\beta\neq 0$, r_j y $\bar{r}_j$ contribuye con

$$\begin{aligned} &e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots,\ x^{n_j-1}e^{\alpha x}\cos\beta x\\ &e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots,\ x^{n_j-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.\end{aligned}$$

Entonces la solución general puede ser expresada como

$$x(t)=\begin{pmatrix} c_{11}\xi_1(t) & c_{12}\xi_2(t) & \cdots & c_{1n}\xi_n(t)\\ c_{21}\xi_1(t) & c_{22}\xi_2(t) & \cdots & c_{2n}\xi_n(t)\\ \vdots & & & \\ c_{n1}\xi_1(t) & c_{n2}\xi_2(t) & \cdots & c_{nn}\xi_n(t)\end{pmatrix}$$

donde n^2-n de las c_{ij} dependen de n c_{ij}.

Ejemplo

5.- Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-x+2y\\ \dot{y}&=-2x-y.\end{aligned}$$

La matriz asociada al sistema es por consiguiente

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico es

$$P_A(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+1+4=(\lambda+1)^2+2^2,$$

por lo tanto, los valores propios son:

$$\lambda_1=-1+2i,\quad \lambda_2=-1-2i,$$

por el teorema precedente, la solución general tendrá la forma

$$x(t) = c_{11}e^{-t}\cos(2t) + c_{12}e^{-t}\sin(2t)$$
$$y(t) = c_{21}e^{-t}\cos(2t) + c_{22}e^{-t}\sin(2t).$$

Planteando, por ejemplo, $c_{11} = c_1$ y $c_{12} = c_2$, remplazando en la primera ecuación se obtiene

$$(-c_1 + 2c_2)e^{-t}\cos(2t) + (-2c_1 - c_2)e^{-t}\sin(2t) = (-c_1 + 2c_{21})e^{-t}\cos(2t) + (-c_2 + 2c_{22})e^{-t}\sin(2t).$$

De donde, $c_{21} = c_2$ y $c_{22} = -c_1$ y la solución general será

$$x(t) = c_1e^{-t}\cos(2t) + c_2e^{-t}\sin(2t)$$
$$y(t) = c_2e^{-t}\cos(2t) - c_1e^{-t}\sin(2t).$$

Un Método Alternativo

También podemos determinar la solución general de un sistema diferencial lineal a coeficientes sin tener que utilizar la exponencial de una matriz, convirtiendo el sistema en una ecuación diferencial ordinaria lineal respecto a una de las variables del sistema. Recordemos la notación operacional del primer capítulo

$$Dx_j = \dot{x}, \quad Ix_j = x_j$$

por lo tanto un sistema lineal a coeficientes puede expresarse como

$$\begin{array}{ccccccc}
(a_{11}D - b_{11}I)x_1 & + & (a_{12}D - b_{12}I)x_2 & + & \cdots & + & (a_{1n}D - b_{1n}I)x_n = 0 \\
(a_{21}D - b_{21}I)x_1 & + & (a_{22}D - b_{22}I)x_2 & + & \cdots & + & (a_{2n}D - b_{2n}I)x_n = 0 \\
\vdots & & & & & & \\
(a_{n1}D - b_{n1}I)x_1 & + & (a_{n2}D - b_{n2}I)x_2 & + & \cdots & + & (a_{nn}D - b_{nn}I)x_n = 0.
\end{array}$$

Luego se aplica el procedimiento de eliminación de Gauss, para obtener una ecuación diferencial para cada una de las variables.

Ejemplo

6.- Consideremos el sistema diferencial de talla 3

$$\dot{x} = y + z =$$
$$\dot{y} = x + z$$
$$\dot{z} = x + y,$$

que la escribimos en la notación operacional como

$$\begin{array}{cccccc}
Dx & - & Iy & - & Iz & = 0 \\
-Ix & + & Dy & - & Iz & = 0 \\
-Ix & - & Iy & + & Dz & = 0.
\end{array}$$

Hagamos desaparecer la variable x de las dos últimas ecuaciones, para eso se debe realizar

$$\text{Primera ecuación} + D(\text{Segunda ecuación})$$
$$\text{Primera ecuación} + D(\text{Tercera ecuación})$$

obteniendo de está manera

$$\begin{array}{cccc}
(D^2 - I)y & - & (D + I)z & = 0 \\
-(D + I)y & + & (D^2 - I)z & = 0
\end{array}$$

eliminamos ahora la variable y, multiplicando por $(D - I)$ la última ecuación. De esta manera

$$(D + I)(D - 2I)Dz = 0,$$

por lo que

$$z(t) = c_{31}e^{-t} + c_{32}e^{2t} + c_{33}1.$$

Por simetría del problema, se obtiene las mismas ecuaciones para x e y, de donde

$$\begin{aligned} x(t) &= c_{11}e^{-t} + c_{12}e^{2t} + c_{13}1, \\ y(t) &= c_{21}e^{-t} + c_{22}e^{2t} + c_{23}1. \end{aligned}$$

Remplazando en las ecuaciones del sistema, se obtiene:

$$\begin{aligned} -c_{11}e^{-t} + 2c_{12}e^{2t} &= (c_{21} + c_{31})e^{-t} + (c_{22} + c_{32})e^{2t} + (c_{23} + c_{33}), \\ -c_{21}e^{-t} + 2c_{22}e^{2t} &= (c_{11} + c_{31})e^{-t} + (c_{12} + c_{32})e^{2t} + (c_{13} + c_{33}), \\ -c_{31}e^{-t} + 2c_{32}e^{2t} &= (c_{11} + c_{21})e^{-t} + (c_{12} + c_{22})e^{2t} + (c_{13} + c_{13}), \end{aligned}$$

Resolviendo las ecuaciones lineales que resultan, se tiene

$$c_{13} = c_{23} = c_{33} = 0, \quad c_{31} = -(c_{11} + c_{21}), \quad c_{32} = c_{22} = c_{12}.$$

Planteando $c_{11} = c_1$, $c_{21} = c_2$ y $c_{12} = c_3$, la solución general del sistema está dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1e^{-t} + c_3e^{2t}, \\ y(t) &= c_2e^{-t} + c_3e^{2t}, \\ z(t) &= -(c_1 + c_2)e^{-t} + c_2e^{2t}. \end{aligned}$$

II.4 Estabilidad y Estudio de Puntos Críticos

En esta sección estudiaremos los conceptos de estabilidad, para tal efecto, consideremos el sistema diferencial de primer orden y talla n

$$\dot{x} = f(t, x).$$

Introducimos la notación

$$x(t, t_0, x_0),$$

que indica que es la solución al problema a valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Con la notación introducida podemos plantear las situaciones con las que se puede confrontar en la solución de ecuaciones y o sistemas diferenciales, además de los problemas diferenciales a valor inicial.

Usualmente los sistemas diferenciales, al igual que las ecuaciones diferenciales son el lenguaje matemático para describir fenómenos, pero también en la mayoría de los casos son simplificaciones de la realidad. Por consiguiente, la formulación diferencial (simplista), la podemos escribir

$$\dot{x} = f(t, x),$$

y la situación real

$$\dot{x} = f(t, x) + \epsilon g(t, x).$$

En general no se puede expresar $g(t, x)$.

La otra situación, es que se debe resolver a problemas a valor inicial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t,x)\\ x(t_0) &= x_0.\end{aligned}$$

Sin embargo, por la precisión de las medidas y otros factores, uno resuelve

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t,x)\\ x(t_0) &= x_0 + \Delta x_0.\end{aligned}$$

Proposición II.4.1.- *La solución del problema*

$$\dot{x} = f(t,x) + \epsilon g(t,x), \quad x(t_0) = x_0,$$

esta, para $|\epsilon|$ pequeño, dada por

$$x_\epsilon(ta) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \cdots,$$

donde

$$\begin{aligned}\dot{x}_0(t) &= f(t, x_0(t)), \quad x_0(t) = x_0\\ \dot{x}_1(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t)) \cdot x_1(t) + g(t, x_0(t)), \quad x_1(t_0) = 0.\end{aligned}$$

Ejemplo

1.- Consideremos el problema a valor inicial para la ecuación de Bernouilli

$$\dot{x} = x + \epsilon x^2, \quad x(0) = 1.$$

El teorema precedente nos permite descomponer la solución de este problema en dos problemas a valor inicial:

$$\dot{x}_0 = x_0, \quad x_0(0) = 1,$$

cuya solución es $x_0(t) = e^t$ y el problema

$$\dot{x}_1 = 1x_1 + \epsilon(e^2 t), \quad x_1(0) = 0,$$

la solución de este problema, será

$$x_1(t) = -\epsilon e^t + \epsilon e^{2t},$$

por lo que

$$x(t) = e^t + \epsilon(-\epsilon e^t + \epsilon e^{2t}) + \cdots.$$

Resolviendo la ecuación de Bernouilli, se tiene

$$x(t) = \frac{1}{(1+\epsilon)e^{-t} - \epsilon} = \frac{e^t}{(1+\epsilon) - \epsilon e^t},$$

se deduce que la primera solución es más simple de calcularla.

Definición II.4.2.- Una solución $x(t, t_0, x_0)$ del sistema

$$\dot{x} = f(t,x),$$

se dirá que es estable en el sentido de Liapunov, si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que

$$\|\Delta x_0\| < \delta \text{ y } t \geq t_0 \Rightarrow \|y(t, t_0, x_0 + \Delta x_0) - y(t, t_0, x_0)\| < \epsilon.$$

Se dirá que es asintóticamente, si es estable y además existe δ_0 tal que

$$\|\Delta x_0\| < \delta_0 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \|y(t, t_0, x_0 + \Delta x_0) - y(t, t_0, x_0)\| = 0.$$

La solución es inestable si no es estable.

Ejemplos

2.- Consideremos el problema a valor inicial

$$\begin{aligned} y' &= \lambda y \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

La solución de esta ecuación es $y(x) = y_0 e^{\lambda x}$. Ahora bien, si $\lambda < 0$, se tiene $e^{\lambda x} \to 0$ cuando $x \to +\infty$ y si $\lambda > 0$, $e^{\lambda x} \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$. Por lo tanto, si $\lambda < 0$ toda solución $y(x, 0, y_0)$ es estable y asintóticamente estable. Si $\lambda > 0$, toda solución será inestable. Ver figura II.10.

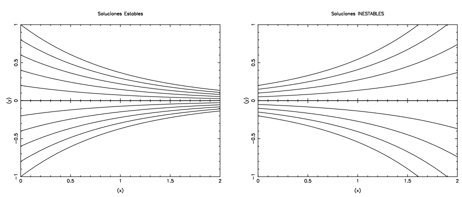


Figura II.10.- Estabilidad de Soluciones

3.- Consideremos la ecuación diferencial

$$y' = y(y-1).$$

Esta ecuación tiene dos soluciones estacionarias:

$$y(x) = 0, \quad y(x) = 1.$$

$y(x) = 0$ es una solución asintóticamente estable, mientras que $y(x) = 1$ es inestable; ver figura II.11.

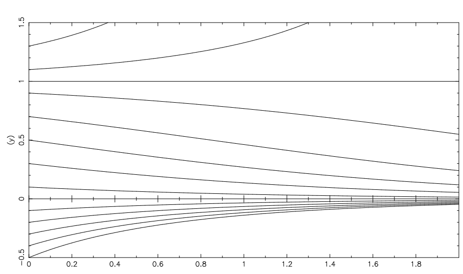


Figura II.11.- Estabilidad de Soluciones

Estabilidad de las Soluciones Estacionarias

La resolución de sistemas diferenciales por medio de métodos análiticos es posible para un número reducido de tipos de sistemas diferenciales. Para contrarestar está limitación, hemos introducido métodos que nos permiten estudiar las trayectorias de dichos sistemas y en consecuencia obtener información respecto a las soluciones. Un tipo importante de solución son las soluciones estacionarias, porque en muchas aplicaciones se buscan soluciones estacionarias.

Nuestro objetivo será estudiar las soluciones de sistemas autónomos de talla 2 en las proximidades de las soluciones estacionarias y clasificar los tipos de soluciones.

Consideremos el sistema autónomo de talla 2

$$\dot{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

Sea $(x^*, y^*$ un punto en que la solución es estacionaria y suponiendo que f y g sean lo suficientemente derivables, se tiene, ver curso Cálculo II,

$$\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} f(x^*,y^*) \\ g(x^*,y^*) \end{pmatrix}}_{=0} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*,y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*,y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x^* \\ y-y^* \end{pmatrix},$$

cuando (x,y) es lo bastante próximo a (x^*,y^*).

Por consiguiente, cuando se esté cerca del punto crítico (x^*,y^*), planteando $u = x - x^*$, $v = y - y^*$, obtenemos el sistema que aproxima en las proximidades de (x^*,y^*).

$$\dot{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*,y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*,y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

que no es nada más que un sistema lineal a coefecientes constantes.

En consecuencia, estudiar las soluciones alrededor de las soluciones estacionarias, es estudiar los sistemas de la forma

$$\dot{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

La solución del sistema está relacionada a los valores propios de la matriz A. Sean λ_1 y λ_2 los valores propios de A. Se tiene los siguientes casos:

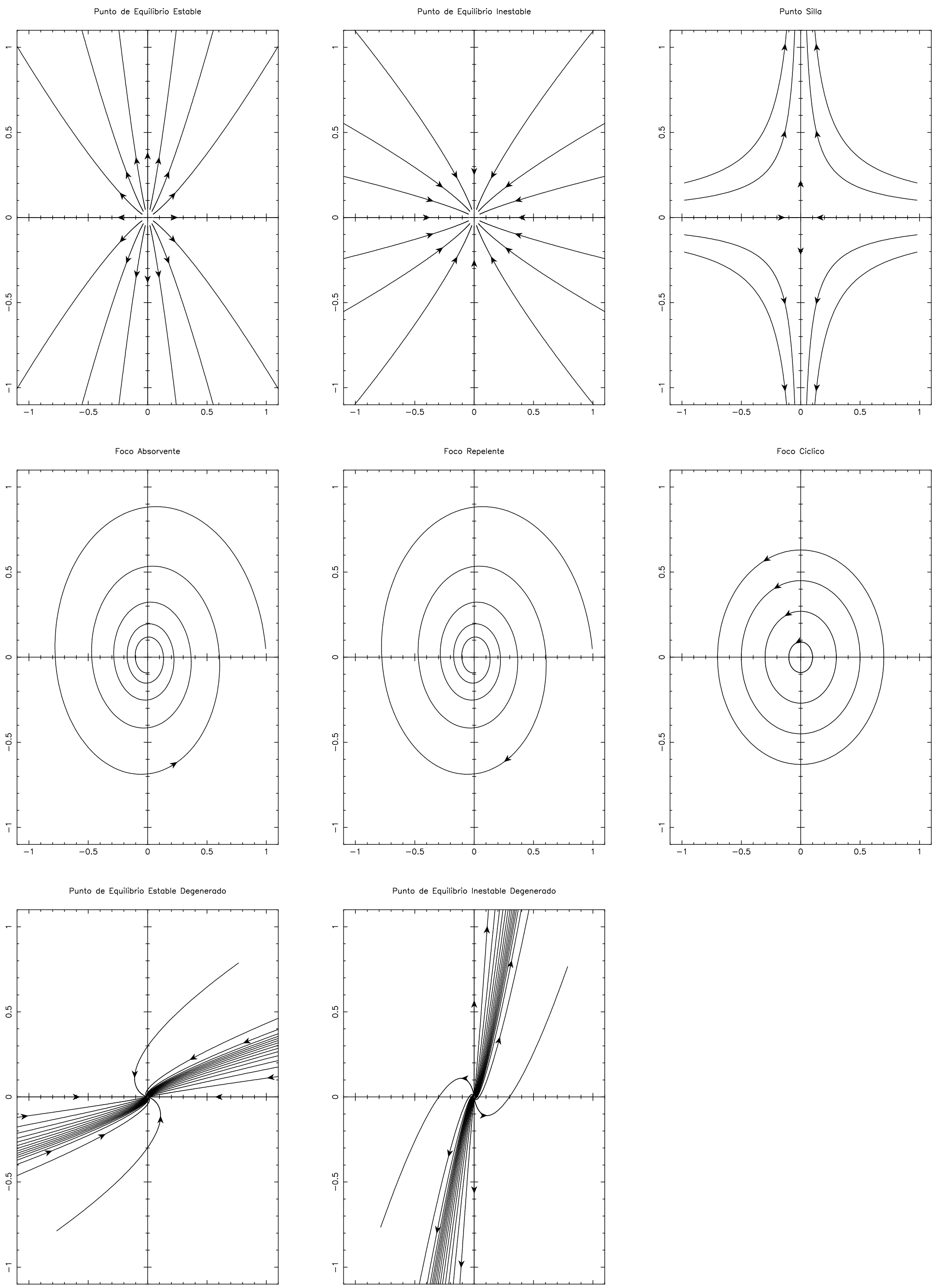


Figura II.12.- Clasificación de puntos críticos

1.- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. En un sistema adecuado de coordenadas ξ, ζ, se tiene

$$\xi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t},$$
$$\zeta(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Se observa que cuando $t \to +\infty$, tanto $\xi(t)$ y $\zeta(t)$ tienden a $(0,0)$. En este caso, se dirá que (x^*, y^*) es un punto de equilibrio estable. Ver figura II.12.

2.- $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. En un sistema adecuado de coordenadas ξ, ζ, se tiene

$$\begin{aligned}\xi(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t},\\ \zeta(t) &= c_2 e^{\lambda_2 t}.\end{aligned}$$

Se observa que cuando $t \to +\infty$, tanto $e^{\lambda_1 t}$, como $e^{\lambda_2 t}$ divergen. En este caso, se dirá que (x^*, y^*) es un punto de equilibrio inestable. Ver figura II.12.

3.- $0\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. En un sistema adecuado de coordenadas ξ, ζ, se tiene

$$\begin{aligned}\xi(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t},\\ \zeta(t) &= c_2 e^{\lambda_2 t}.\end{aligned}$$

Se observa que cuando $t \to +\infty$, $e^{\lambda_1 t}$ tiende a 0, mientras que $e^{\lambda_2 t}$ diverge. Se dira que (x^*, y^*) es un punto silla o cumbre. Ver figura II.12.

4.- Supongamos que $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$, si $\alpha < 0$, la solución en un sistema adecuado de coordenadas ξ y ζ, será

$$\begin{aligned}\xi &= c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t)\\ \zeta &= c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t)\end{aligned}$$

cuando $t \to +\infty$, $\xi(t)$ y $\zeta(t)$ tienden a 0. La trayectoria de este tipo de soluciones son espirales que convergen al centro de la espiral. (x^*, y^*) se llama foco absorvente. Ver figura II.12.

5.- Supongamos que $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ con $\beta \neq 0$, si $\alpha > 0$, la solución en un sistema adecuado de coordenadas ξ y ζ, será

$$\begin{aligned}\xi &= c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t)\\ \zeta &= c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t)\end{aligned}$$

cuando $t \to +\infty$, $\xi(t)$ y $\zeta(t)$ divergen. La trayectoria de este tipo de soluciones son espirales que divergen del centro de la espiral. (x^*, y^*) se llama foco repelente. Ver figura II.12

6.- Si $\lambda_1 = i\beta$ con $\beta \neq 0$, las soluciones en un sistema adecuado de coordenadas serán

$$\begin{aligned}\xi &= c_1 \cos(\beta t)\\ \zeta &= c_2 \sin(\beta t)\end{aligned}$$

En este caso, todas las trayectorias son cerradas. Por lo que (x^*, y^*), se llama foco cíclico. Ver figura II.12.

Remarca.- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, tenemos los siguientes escenario:

i) $\lambda < 0$ y la solución es un caso límite de 1) y 4), en ambos casos la solución tiende al punto de equilibrio, por lo que (x^*, y^*) es un punto de equilibrio degenerado Ver figura II.12.

ii) $\lambda > 0$, la solución es un caso límite de 2) y 5), se dira que (x^*, y^*) es un punto de equilibrio inestable. Ver figura II.12.

Ejemplos

4.- Consideremos el sistema diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x} =& x(y-1)\\ \dot{y} =& (x-y)(x+y-3)\end{aligned}$$

Son puntos críticos de este sistema $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,3)$ $(2,1)$. En la figura II.13 se observan las trayectorias en el rectángulo $[-1,4]\times[-1,4]$

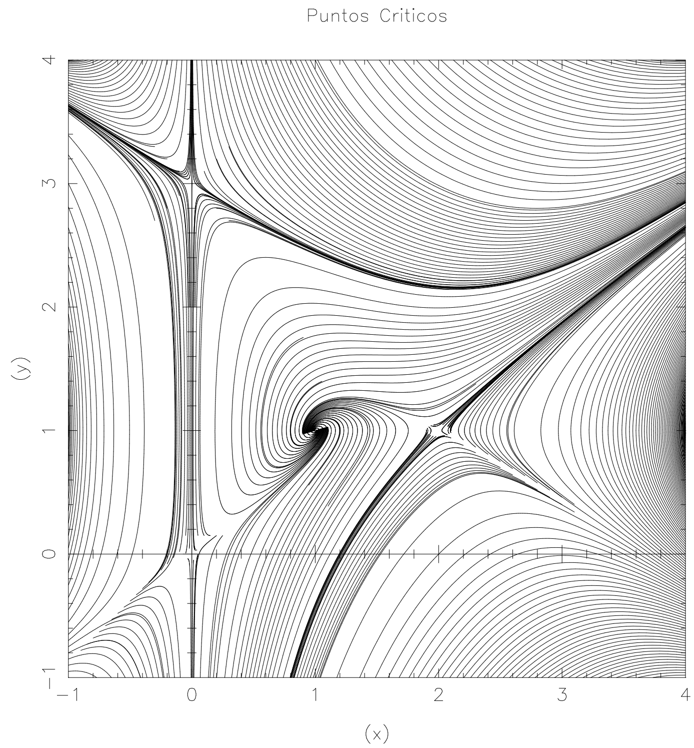


Figura II.13.-Puntos Críticos

Se observa que los puntos $(0,0)$, $(0,3)$ y $(2,1)$ son puntos sillas y que el punto $(1,1)$ es un foco repelente.

II.5 Ejercicios

1.- Dados los sistemas diferenciales, determinar que soluciones son estacionarias, cuales son periódicas y cuales no son periódicas

a)
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 \\ \dot{y} = x^2 + y^2; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \dot{x} = x + y - 1 \\ \dot{y} = x - y + 1 \end{cases}$$

2.- Graficar el campo de vectores dado por los sistemas de la pregunta 1.

3.- Consideremos la ecuación del péndulo simple

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0.$$

a) Convertir en un sistema diferencial de orden 1. Cuales son las componentes del espacio de faces.

b) Determinar las trayectorias de este sistema diferencial.

c) Suponiendo que el péndulo en el instante 0 satisface $\theta = 0$, clasifique las soluciones (estacionarias, periódicas y no periódicas), de acuerdo al valor que toma la velocidad angular inicial.

4.- Determine un campo de vectores tangentes, siempre que sea posible y encuentre las familias de curvas que forman un ángulo recto con la familia de:
   a) Rectas que pasan por el origen.
   b) Circunferencias del plano.
   c) Circunferencias de centro la recta $y = x$ y que pasan por el punto $(1, 1)$.
   d) Las hipérbolas de centro el origen y asintotas las rectas $y = x$ y $y = -x$.
   e) Las parábolas de eje de simetría la recta $y = 2x + 1$ y vertice $(3, 1)$.
   f) Las parábolas de directriz la recta $y + x = 0$ y foco sobre la recta $x - y = 0$.
   g) Las circunfererencias de centro el origen.

5.- Determine la familia de curvas que forman un ángulo de $45°$, siempre y cuando sea posible, de las familias del ejercicio 4.

6.- La vida media del Carbono 14 es de 5568 años. En un gramo de carbón de madera recientemente producido hay en promedio 6.08 desintegraciones debidas al Carbono 14 por minuto. En un trozo encontrado en unas grutas en Francia, se midió 0.97 desintegraciones por mínuto y por gramo de carbon. Estimar la fecha probable de esta muestra.

7.- ¿Para que valores de λ, existe una solución (no nula) al problema

$$\begin{cases} \ddot{x} + \lambda^2 x = 0, \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(1) = 0? \end{cases}$$

8.- Encontrar las soluciones generales de las ecuaciones siguientes:

$$\epsilon\dot{x} + x = 0, \quad \dot{x} + \epsilon x = 0, \quad \epsilon^2\ddot{x} + x = 0, \ddot{x} + \epsilon^2 x = 0.$$

Discutir el caso en que ϵ tiende hacia cero.

9.- Resolver las ecuaciones:

$$\dot{x} + x - tx^2 = 0, \quad \text{y } \dot{x} = ax - bx^2 \text{ donde } a, b > 0.$$

10.- a) Mostrar que toda solución de $\ddot{x} + x + x^3 = 0$ es periódica.

b) Lo mismo para $\ddot{x} + x^3 = 0$ y $\ddot{x} + \dfrac{x}{1 + x^2} = 0$.

11.- Estudiar la periocidad de las soluciones de $\dot{x} + x - 2x^3 = 0$, suponiendo que

$$\dot{x}(0)^2 + x(0)^2 - x(0)^4 \neq \frac{1}{4}.$$

12.- Dar la solución general de la ecuación $\dot{x} = Ax$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

13.- Dar la solución general de la ecuación

$$x^{(4)} + 2x^{(2)} + x = 0.$$

14.- Un punto P es arrastrado por el plano xy mediante una cuerda PT de longitud a. Si T arranca del origne y se mueve a lo largo del eje y positivo, y si P arranca del punto $(a, 0)$. ¿Cuál es la trayectoria de P? Esta curva se llama tractriz

15.- Un rio bastante ancho, sigue su cause siguiendo la dirección norte sur con una velocidad a. Un bote en el rio se hunde, el ocupante de la barca divisa un islote siguiendo la dirección este a una distancia b; en la dirección oeste a una distancia $c > b$ se encuentra una de las orillas. Si la persona nada con una velocidad d, indique a donde debe dirigirse para estar a salvo. Discuta las diferentes posibilidades

16.- ¿Qué curva situada por encima del eje x tiene la propiedad de que la longitud del arco que une cualesquiera dos puntos sobre ella es proporcional al área bajo dicho arco?

17.- Determinar las soluciones generales de los sistemas:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 3x + 2y \end{cases}$$

18.- Determinar la solución general del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + t - 1 \\ \dot{y} = 3x + 2y - 5t - 2. \end{cases}.$$

19.- Hallar los puntos críticos de:

a) $$\ddot{x} + \dot{x} - (x^3 + x^2 - 2x) = 0$$

b) $$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 5x + 6, \\ \dot{y} = x - y \end{cases}.$$

20.- Para cada uno de los siguientes sistemas no lineales:
i) Hallar sus puntos críticos;
ii) Graficar algunas trayectorias;

a) $$\begin{cases} \dot{x} = y(x^2 + 1) \\ \dot{y} = 2xy^2; \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \dot{x} = y(x^2 + 1) \\ \dot{y} = -x(x^2 + 1). \end{cases}$$

21.- Dibujar el diagrama de fases de la ecuación $\ddot{x} = 2x^3$ y verificar que tiene en el origen un punto crítico en el origen.

22.- Mostrar que $(0, 0)$ es un punto crítico asintóticamente estable para cada uno de estos sistemas:

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x^3 - y \\ \dot{y} = x^5 - 2y^3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x} - 2x + xy^2 \\ \dot{y} = -x^2y^2 - y^3 \end{cases}.$$

23.- La ecuación de Van der Pol es

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0.$$

Investigar las propiedades de estabilidad del punto crítico $x = 0$ y $\dot{x} = 0$ en el espacio de fases para los casos $\mu > 0$ y $\mu < 0$.

24.- La mayoría de los muelles en la realidad son no lineales. Un muelle no lineal se dice que es duro o blando según que la magnitud de la fuerza de recuperación crezca más o menos rápidamente que una función lineal del desplazamiento. La ecuación

$$\dot{x} + kx + ax^3 = 0, \quad k > 0,$$

describe el movimiento de un muelle duro si $a > 0$ y de uno blando si $a < 0$. Dibujar las trayectorias en el plano de fases y estudiar el punto crítico.

25.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuamente derivable y sea la ecuación diferencial

$$y'' = f(y, y').$$

Si $f(0,0) = 0$, mostrar que toda solución no nula de esta ecuación tiene ceros simples, si es que los tiene. Ejemplos $y'' + y = 0$, $y'' + \sin y = 0$.

26.- Mostrar que si $A(x)$ es una matriz antisymetrica, entonces, se puede encontrar un sistema fundamental, respecto a la cual la resolvente es una matriz ortogonal.

27.- Sea

$$y' = A(x)y$$

donde $A(x)$ es una matriz de talla n. Mostrar que si se conoce una solución no trivial $\varphi(x)$ del sistema, se puede reducir el sistema a un problema análogo pero donde la matriz es de talla $n-1$.

Si se supone que $\varphi \neq 0$, buscar una solución $y(x) = u\varphi(x) + z$ donde $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y donde

$$z = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

28.- Utilizando el ejercicio 27, determinar un sistema fundamental de soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1/x & -1 \\ 1/x^2 & 2/x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sabiendo que

$$y(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix}$$

es una solución.

29.- En base al ejercicio precedente, resolver el problema a valor inicial

$$y' = \begin{pmatrix} 1/x & -1 \\ 1/x^2 & 2/x \end{pmatrix} y + (\,1/crx^2\,), \quad y(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

30.- Consideremos la ecuación del péndulo

$$y'' + \sin y = 0, \quad y(0) = \epsilon,\ y'(0) = 0,$$

donde la amplitud ϵ se supone pequeña. Mostrar que la solución puede ser escrita bajo la forma

$$y(x) = \epsilon y_1(x) + \epsilon^2 y_2(x) + \cdots.$$

Calcular $y_1(x)$ y $y_2(x)$.

31.- Calcular las soluciones estacionarias de

$$\begin{aligned} y_1 &= -y_1 y_2^2 - 2y_2 \\ y_2 &= y_1 - y_1^2 y_2 \end{aligned}$$

y mostrar que la solución nula es estable.

32.- Estudiar la estabilidad de los 4 puntos críticos del ejemplo 4 de la sección II.4.

Capítulo III

Complementos

III.1 Ecuaciones Diferenciales Exactas

A menudo se encuentran expresiones de la forma

$$a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy = 0, \tag{DE}$$

o

$$a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz = 0, \tag{DE}$$

o más generalmente

$$a_1(x)\,dx_1 + a_2(x)\,dx_2 + \cdots + a_n(x)\,dx_n = 0, \tag{DE}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$.

Limitaremos el estudio de este tipo de ecuaciones al caso en que $n \leq 3$, por comodidad supondremos $n = 3$. El primer paso para determinar el significado de este tipo de ecuaciones es saber lo que es el símbolo dx_i. Por lo hecho hasta ahora, las soluciones de los problemas diferenciales provenientes de ecuaciones y o sistemas pueden representarse mediante curvas. Por consiguiente, si $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots, x_n(t) \end{pmatrix}$$

es una parametrización de una curva, se tiene por definición

$$dx_i(t) = \dot{x}_i(t)\,dt,$$

donde $dt : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la aplicación lineal dada por

$$\begin{aligned} dt : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \Delta t &\mapsto \Delta t. \end{aligned}$$

Geometricamente dx_i, llamada diferencial de dx_i mide la variación de $x_i(t)$ cuando se modifica t.

Regresando a la ecuación (DE), si $x(t)$ es una parametrización que satisface la ecuación (DE), se tiene

$$\left(a_1(x(t))\dot{x}_1(t) + \cdots + a_n(x(t))\dot{x}_n(t)\right)\,dt = 0.$$

De donde, cualquier solución $x(t)$ de (DE) satisface

$$a_1(x(t))\dot{x}_1(t) + \cdots + a_n(x(t))\dot{x}_n(t) = 0. \tag{III.1.1}$$

Remarca.- En el caso $n = 2$, utilizando el hecho que

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1},$$

la ecuación (DE), es equivalente a la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{a_1(x_1, x_2)}{a_2(x_1, x_2)}.$$

Por otro lado, las soluciones de (DE) forman subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, para $n = 2$, se tiene curvas y para $n = 3$ serán superficies. Estos conjuntos se representan en forma de ecuaciones algebraicas como

$$g(x, y) = c, \quad \text{o bien } g(x, y, z) = c,$$

donde c es una constante.

Ahora bien, si $(x(t), y(t), z(t))$ es la parametrización de una curva que está dentro una superficie de ecuación $g(x, y, z) = c$, se tiene

$$f(t) = g(x(t), y(t), z(t)) = c$$

lo que significa que $\dot{f}(t) = 0$, para todo t, aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\dot{f}(t) = \frac{\partial g}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial g}{\partial y}\dot{y}(t) + \frac{\partial g}{\partial z}\dot{z}(t) = 0. \tag{III.1.2}$$

Deducimos que $g(x, y, z) = C$ es solución de la ecuación

$$\frac{\partial g}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}\,dy + \frac{\partial g}{\partial z}\,dz = 0.$$

Por consiguiente, si la ecuación diferencial (DE)

$$a(x, y, z)\,dx + b(x, y, z)\,dy + c(x, y, z)\,dz = 0, \tag{DE}$$

es tal que existe una función $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable es tal que

$$\operatorname{grad} g(x, y, c) = \begin{pmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, c) \\ c(x, y, z) \end{pmatrix} = a(x, y, z)i + b(x, y, z)j + c(x, y, z)k$$

se dira que es exacta, g se llamará primitiva y la solución general del problema será $g(x, y, z) = c$.

Ejemplos

1.- Consideremos la ecuación diferencial

$$y\,dx + x\,dy = 0,$$

Observamos que $g(x, y) = xy$ es una primitiva de la ecuación y por consiguiente la solución general es $xy = C$.

2.- Consideremos la ecuación diferencial

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0.$$

La función

$$g(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2$$

es una primitiva de la ecuación y por consiguiente la solución general es

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 = C.$$

3.- Consideremos

$$y\,dx - x\,dy = 0,$$

y queremos encontrar una función $g(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -x,$$

deducimos que tal g debería ser de la forma $g(x, y) = yx + c(y)$ si tomamos en cuenta la derivada respecto a x. Derivando g respecto a y obtenemos

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x + c'(y) = -x,$$

lo que es imposible, porque se tendría $c'(y) = -2x$ y c depende solamente de y no de x. Por consiguiente esta ecuación no admite primitiva, lo que no significa que no tenga solución.

Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de primitivas

Si $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es dos veces continuamente diferenciable, se tiene

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} g(x, y, z)) = 0,$$

la verificación es sencilla y dejamos como ejercicio. A continuación enunciamos el siguiente teorema sin demostración.

Teorema III.1.1.- *La ecuación diferencial*

$$a(x, y, z)\,dx + b(x, y, z)\,dy + c(x, y, z)\,dz$$

admite primitiva, si y solamente si

$$\operatorname{rot}(a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z)) = 0.$$

Corolario III.1.2.- *La ecuación diferencial*

$$a(x, y)\,dx + \_(x, y)\,dy = 0$$

admite primitiva, si y solamente si

$$\frac{\partial a(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial b(x, y)}{\partial x}.$$

Demostración.- Ejercicio.

Utilizando el criterio del teorema y o corolario se puede determinar si una ecuación (DE) admite o no primitiva.

Ejemplo

4.- La ecuación

$$y\,dx - x\,dy = 0,$$

no admite primitiva por que

$$\frac{\partial y}{\partial y} = 1 \neq -1 = \frac{\partial - x}{\partial x}.$$

Determinación de primitiva

Una vez que se ha determinado que la ecuación diferencial

$$a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz$$

admite primitiva, el problema consiste en determinar la primitiva, en algunos casos la primitiva salta a la vista, en otros no es tan evidente. Por consiguiente es importante conocer un método que nos permita determinarla.

Repasando Cálculo II y el curso de Análisis Vectorial, la integral de línea

$$\int_{\mathcal{C}} a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz,$$

donde $\mathcal{C}$ es un arco de curva orientado, en el caso en que

$$\operatorname{rot}(a(x,y,z)i + b(x,y,c)j + c(x,y,z)k) = 0,$$

solo depende de las extremidades de $\mathcal{C}$ y no de la misma curva $\mathcal{C}$. Ver figura III.1

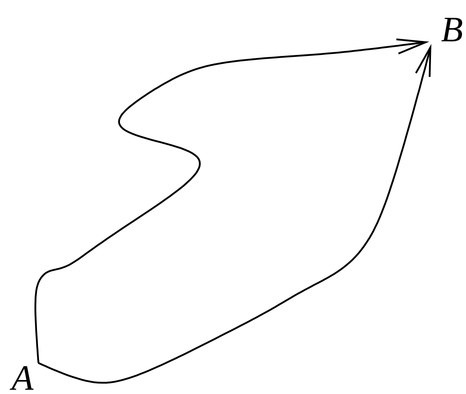


Figura III.1.- Integrales de Línea

Por consiguiente es consistente introducir la notación

$$\int_A^B a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz = \int_{\mathcal{C}} a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz$$

en el caso en que $\operatorname{rot}(a(x,y,z)i + b(x,y,c)j + c(x,y,z)k) = 0$.

Eligiendo un punto $A \in \mathbb{R}^3$ y dejandolo fijo, planteamos

$$g(x,y,z) = \int_A^{(x,y,z)} a(u,v,w)\,du + b(u,v,w)\,dv + c(u,v,w)\,dw.$$

Se muestra que $\operatorname{grad} g(x,y,z) = a(x,y,z)i + b(x,y,z)j + c(x,y,z)k$.

Una vez que sabemos, cómo determinar una primitiva para una ecuación diferencial exacta, por medio de una integral de línea, el problema se resume a encontrar un buen punto origen de las curvas y sobre todo las buenas curvas.

Ejemplo.-

5.- Resolvamos la ecuación

$$(x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

Verifiquemos que la ecuación admite primitiva:

$$\frac{\partial x^2 +^2}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial 2xy}{\partial x} = 2y.$$

Ahora elegimos como origen de integración el punto $(0,0)$, luego integramos siguiendo la trayectoria que une $(0,0)$ con $(0,y)$ y $(0,y)$ con (x,y), lo que da

$$g(x,y) = \int_0^x (s^2 + y^2)\,ds = \frac{1}{3}x^3 + xy^2.$$

Por lo tanto, la solución general será

$$\frac{1}{3}x^3 + xy^2 = C.$$

Cuando la ecuación diferencia (DE) admite primitiva, la resolución se convierte en un problema de resolver una integral de línea. Cuando la ecuación no admite primitiva, se tiene varias opciones para encontrar la solución general de la ecuación diferencial (DE):

1.- Convertir en una ecuación diferencial ordinaria, esto es posible cuando la ecuación depende solamente de 2 variables:

$$a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy = 0,$$

se convierte en

$$y' = -\frac{a(x,y)}{b(x,y)}.$$

Ejemplo

6.- Resolvamos

$$y\,dx - x\,dy = 0.$$

Es equivalente a resolver

$$y' = \frac{1}{x}y$$

cuya solución general es $y(x) = Ce^{\ln x} = Cx$.

2.- Factores Integrantes

Si la ecuación

$$a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz = 0$$

no admite primitiva, se puede multiplicar dicha ecuación por una función $\mu(x,y,z)$ no identicamente nula de manera que

$$\mu(x,y,z)a(x,y,z)\,dx + \mu(x,y,z)b(x,y,z)\,dy + \mu(x,y,z)c(x,y,z)\,dz = 0$$

admita una primitiva. La función μ se llama **factor integrante**. En general determinar un μ adecuado puede resultar una tarea mucho más dificil que resolver la misma ecuación, pues el factor integrante es solución de una ecuación a derivadas parciales, que en principio es más dificil resolverla que una ecuación diferencial ordinaria.

Ejercicio.- Determinar la ecuación a derivadas parciales en que el factor integrante es solución.

Sin embargo, existen algunos casos en que determinar el factor integrante salta a la vista, por ejemplo si se puede separar la ecuación, es decir convirtiendola en una ecuación de la forma

$$p(x)\,dx + q(y)\,dy + r(z)\,dz = 0.$$

Por otro lado, en el caso bidimensional

$$a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy = 0,$$

el factor intgrante μ satisface la ecuación a derivadas parciales

$$\frac{\partial \mu a}{\partial y} = \frac{\partial \mu b}{\partial x},$$

que desarrollandola se tiene

$$\mu\left(\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}\right) = b\frac{\partial \mu}{\partial x} - a\frac{\partial \mu}{\partial y}.$$

Ahora bien, si por ejemplo

$$\left(\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}\right) = m(x)$$

dependo solamente de x y b lo mismo, se puede suponer que μ dependerá solamente de x, lo que da la siguiente ecuación diferencial de primer orden lineal homogénea

$$b(x)\mu' = m(x)\mu$$

que la sabemos resolver muy bien.

7.- Consideremos

$$yx^2\,dx - x\,dy = 0$$

Verificamos que esta ecuación no admite primitiva, por lo que μ es solución de la ecuación diferencial

$$(x^2+1)\mu = -x\mu',$$

por lo tanto, resolviendo la ecuación, obtenemos

$$\mu(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{x}$$

La nueva ecuación estará dada por

$$yxe^{-x^2/2}\,dx - e^{-x^2/2}\,dy = 0,$$

obteniendo como primitiva

$$g(x,y) = -e^{-x^2/2}y,$$

lo que da como solución general

$$-e^{-x^2/2}y = C.$$

3.- Utilizando reglas de cálculo de los diferenciales, la idea es luego de manipular la ecuación diferencial original, llegar a una expresión de la forma

$$dg = 0,$$

lo que implica que $g(x,y,z) = c$. A manera de ilustración recordemos que

$$\begin{aligned} d(u+v) &= du + dv,\\ d(uv) &= v\,du + u\,dv,\\ d(u/v) &= \frac{v\,du - u\,dv}{v^2},\\ d(\cos u) &= -\sin u\,du, \end{aligned}$$

Todas las reglas y fórmulas de derivación aprendidas en cálculo I, son válidas para los diferenciales.

8.- Consideremos nuevamente la ecuación

$$y\,dx - x\,dy = 0,$$

dividiendola por y^2, se obtiene

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = d(x/y) = 0,$$

lo que da $x/y = c$, es decir $y = cx$.

III.2 Ecuaciones a Derivadas Parciales

Ecuaciones A Derivadas Parciales de Primer Orden y Lineales

Son ecuaciones de la forma

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y,u), \tag{EDP}$$

donde a, b, c son funciones continuas y u es la función incognita.

Suponemos que conocemos u y sea $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada, es decir $r(t) = (x(t), y(t))$. Planteamos $f = u \circ r$. La derivada de f está dada por

$$\dot{f}(t) = \frac{\partial u}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial u}{\partial y}\dot{y}.$$

Comparando el lado izquierdo de la ecuación (EDP) con esta última identidad obtenemos

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x,y) \\ \dot{y} = b(x,y) \end{cases} \tag{EC}$$

que las llamamos ecuaciones características de la ecuación diferencial a derivadas parciales de primer orden lineal. Por otro lado, el lado derecho de las ecuaciones características dan un campo vectorial de vectores tangentes llamado **vectores característicos** o **direcciones características**. Las soluciones de las ecuaciones características son curvas llamadas **curvas características.**

Ahora bien, para proseguir con la solución del problema, necesitamos una curva $\mathcal{C}$ de condiciones iniciales. Para asegurar existencia y unicidad de las curvas características las direcciones características no deben ser tangentes a la curva de condiciones iniciales. Ver figura III.2.

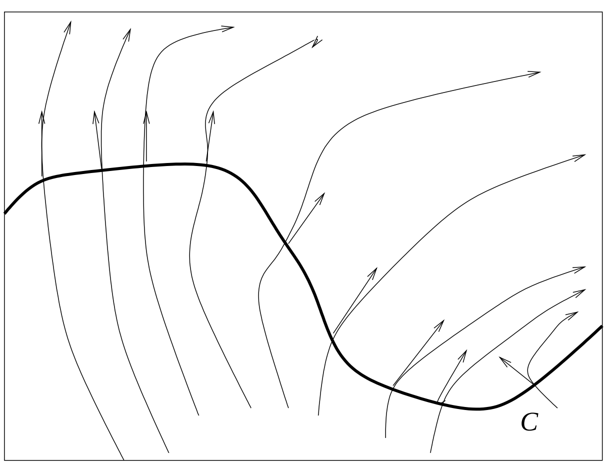


Figura III.2.- Curvas, Direcciones Características y Curva de Condición Inicial

Consideremos la curva caracterísitca que pasa por $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$, es decir la solución del problema a valor inicial

$$\begin{aligned} &\dot{x} = a(x,y) \\ &\dot{y} = b(x,y) \\ &x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0; \end{aligned}$$

Supongamos que conocemos también u sobre la curva de condiciones iniciales, entonce el lado derecho de la ecuación (EDP) se convierte en

$$\begin{aligned}
&\dot{f} = c(x(t), y(t), f) = g(t, f)\\
&f(0) = u(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

que es un problema a valor inicial asociado a una ecuación diferencial de primer orden.

Por consiguiente hemos mostrado como determinar la solución de un problema a valores iniciales asociado a una ecuación diferencial a derivadas parciales de primer orden y lineal, utilizando el método de las características. Remarcamos que u se determina conociendo a que curva característica pertenece cada punto (x, y).

Ejemplos

1.- Consideremos el problema

$$\begin{aligned}
&y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = -u + u^2\\
&u(x, 0) = 2.
\end{aligned}$$

Los vectores característicos están dados por el campo

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

y la curva de condición inicial es el eje x. Observamos que las direcciones características no son tangentes a la curva de condiciones iniciales, por lo que podemos continuar. Ahora consideremos el problema a valor inicial

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = y\\
&\dot{y} = x\\
&x(0) = x_0, \quad y(0) = 0.
\end{aligned}$$

Resolviendo este problema obtenemos la curva característica que pasa por $(x_0, 0)$

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0(\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}) = x_0 \cosh t\\
y(t) &= x_0(\frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}) = x_0 \sinh t
\end{aligned}$$

El lado derecho de la ecuación a derivadas parciales se convierte en

$$\begin{aligned}
&\dot{f} = -f + f^2\\
&f(0) = 2
\end{aligned}$$

que es un problema a valor inicial asociado a una ecuación de tipo de Bernouilli, cuya solución es

$$f(t) = \frac{2}{1 - e^t}.$$

El siguiente paso es determinar $u(x, y)$. Sea (x, y). Tenemos

$$\begin{aligned}
x &= x_0 \cosh t\\
y &= x_0 \sinh t
\end{aligned}$$

despejando x_0 y t obtenemos

$$t = \tanh^{-1}(y/x).$$

Lo que da como solución

$$u(x, y) = \frac{2}{2 - e^{\tanh^{-1}(y/x)}}$$

La verificación de que $u(x,y)$ dado una linea más arriba, la dejamos como ejercicio.

Ecuaciones a Derivadas Parciales de Segundo Orden

Las ecuaciones a derivadas parciales de segundo orden lineales describen fenómenos físicos de diferente naturaleza como la propagación de ondas, las vibraciones, preoblemas de difusión y problemas de índole estacionario. A diferencia del método de las características empleado para resolver ecuaciones a derivadas parciales de primer orden, las ecuaciones

La ecuación de la Cuerda Vibrante.

Consideremos una cuerda de longitud L sometida a una tensión T. Ver figura III.3. La cuerda es sometida a una deformación o impulso transversal lo que ocasiona un movimiento transversal de la cuerda denotado por $u(x,t)$.

Observamos que existen dos puntos (las extremidades) que permanecen inmóviles durante todo el tiempo, esto lo denotamos por

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad \text{(CB)},$$

que llamamos condiciones de borde (CB). Asimismo en el instante $t = 0$, la cuerda tiene una posición, como también una velocidad inicial,

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x), \end{aligned} \qquad \text{(CI)}$$

que son las condiciones iniciales.

La ecuación diferencial que describe el movimiento de la cuerda en el transcurso del tiempo está dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \text{(EDP)}$$

donde v es la velocidad de propagación de las ondas, ($v = \sqrt{T/\mu}$), donde μ es la densidad lineal de la cuerda.

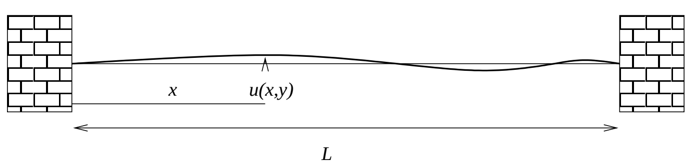


Figura III.3.- La Cuerda Vibrante

Para resolver este problema, aplicamos el método de separación de variables que consiste en plantear $u(x,t) = X(x)T(t)$. Por las condiciones de borde (CB), deducimos que

$$X(0) = X(L), \qquad \text{(CBX)}$$

si queremos que $T(t)$ no sea identicamente nula.

Introducimos las funciones $X(x)$ y $T(t)$ en la ecuación (EDP), por lo que obtenemos

$$\ddot{T}(t)X(x) = v^2 X''(x)T(t),$$

luego

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = v^2 \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Por consiguiente, cada miembro de la última ecuación debe ser obligatoriamente constante; para ver eso, fijamos un t y movemos los x. Hemos obtenido dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = v^2 c, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = c.$$

Resolvemos primero, la ecuación diferencial para $X(x)$. Para c tenemos dos posibilidades:

i) $c = \lambda^2 \geq 0$, en este caso la solución tendrá la forma

$$X(x) = \alpha e^{\lambda x} + \beta e^{-\lambda x}.$$

Las condiciones de borde (CBX) dan $\alpha = \beta = 0$, por lo que si $c \geq 0$, la única solución posible es la nula. Remarcamos que nos interesa encontrar soluciones no nulas.

ii) $c = -\lambda^2$, en este caso la solución será de la forma

$$X(x) = \alpha \cos(\lambda x) + \beta \sin(\lambda x),$$

La primera condicion (CBS), $X(0) = 0$ conduce a que $\alpha = 0$, por lo que nos queda como solución

$$X(x) = \beta \sin(\lambda x).$$

Nos interesa que la solución que encontremos no sea identicamente nula, por que exigimos como condición

$$\sin(\lambda L) = 0.$$

Esto es posible, si y solamente si

$$\lambda = k\frac{\pi}{L}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Sin demostración aceptaremos que las soluciones que nos interesan son cuando $\lambda_k = k\pi/L$ con $k \in \mathbb{N}$. La ecuación diferencial para $T(t)$ es por consiguiente

$$\dot{T} = -v^2\lambda_k^2 T,$$

lo que da como solución general

$$T(t) = (a_k \cos(v\lambda_k t) + b_k \sin(v\lambda_k t)),$$

de donde

$$u(x,t) = (a_k \cos(v\lambda_k t) + b_k \sin(v\lambda_k t))(\sin(\lambda_k x).$$

Ahora bien, como la ecuación es lineal, cualquier suma de soluciones, es también solución, por lo tanto

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(v\lambda_k t) + b_k \sin(v\lambda_k t))(\sin(\lambda_k x).$$

El siguiente paso es determinar los valores que toman a_k y b_k, para tal efecto, nos referimos a las condiciones inicales (CI). Obtenemos

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(\lambda_k x),$$

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} v\lambda_k b_k \sin(\lambda_k x).$$

Proposición III.2.1.- *Se tiene:*

$$\int_0^L \sin(\lambda_m x)\sin(\lambda_n x)\,dx = \begin{cases} 0 \textit{ si } n = m, \\ \dfrac{L}{2} \textit{ si } n \neq m. \end{cases}$$

donde $\lambda_k = k\pi/L$.

Demostración.- Ejercicio.

Utilizando esta ultima proposición obtenemos

$$\int_0^L f(x)\sin(\lambda_n x)dx = a_n \frac{L}{2},$$

de donde

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\lambda_n x)\,dx.$$

Para

$$b_n = \frac{2}{Lv\lambda_n}\int_0^L g(x)\sin(\lambda_n x)\,dx = \frac{2}{vk\pi}\int_0^L g(x)\sin(\lambda_n x)\,dx.$$

Por lo tanto el problema tiene solución única.

Ejemplo

2.- Consideremos una cuerda de longitud π, con $v = 1$, satisfaciendo las condiciones iniciales siguientes:

$$u(x,0) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [\pi/2 - 1/2, \pi/2 + 1/2], \\ 0 \text{ sino.} \end{cases}$$

Utilizando el método de separación de variables, obtenemos que $\lambda_k = k$, para todo k. Llegamos a la solución general de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))\sin(nx).$$

Puesto que $u(x,0) = 0$, deducimos inmediatamente que los $a_n = 0$. Calculemos los b_n.

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\int_{\pi/2-1/2}^{\pi/2+1/2}\sin(nx)\,dx = \frac{2}{n^2\pi}\left(\cos(n(\pi/2 - 1/2)) - \cos(n(\pi/2 + 1/2))\right).$$

En la figurar III.4 podemos observar la solución del movimiento de esta cuerda en la grafica de $u(x,t)$

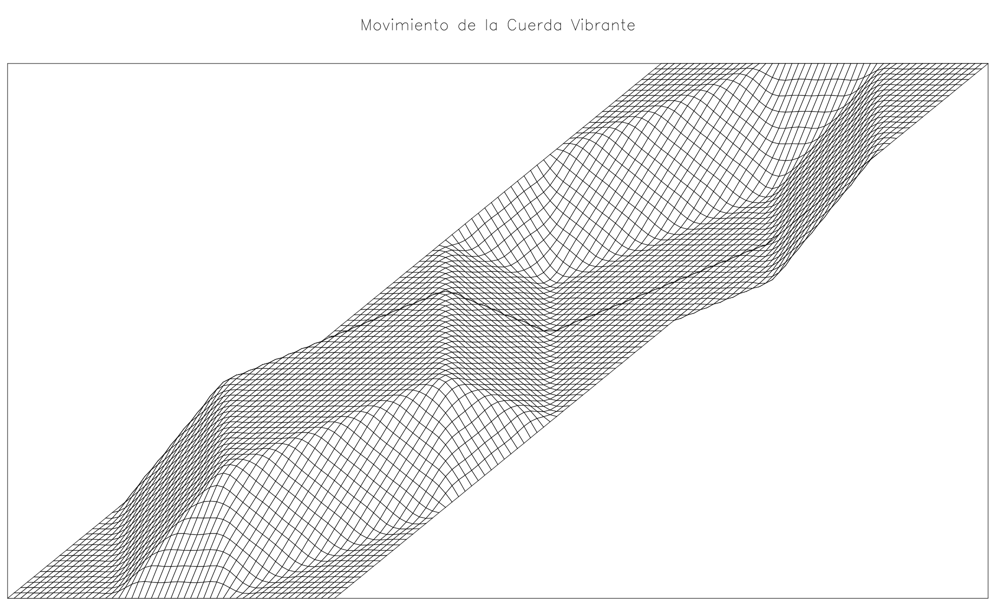


Figura III.4.- Movimiento de una cuerda vibrante

La ecuación del Calor

Consideremos el problema diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{EDP}$$

con condiciones de borde

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \tag{CB}$$

condiciones iniciales

$$u(x,0) = f(x). \tag{CI}$$

Al igual que en el problema de la cuerda vibrante, suponemos que

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

de la misma manera obtenemos las condiciones de borde para $X(x)$:

$$X(0) = X(L) = 0.$$

Remplazamos $u(x,t) = X(x)T(t)$ en la ecuación (EDP) y obtenemos

$$\dot{T}(t)X(x) = \kappa T(t)X''(x),$$

lo que da

$$\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \kappa \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

El mismo razonamiento que en el caso de la cuerda vibrante conduce a que

$$X(x) = \sin(\lambda_k x),$$

donde $\lambda_k = k\pi/L$.

Por lo tanto T es solución

$$\dot{T} = -\kappa \lambda_k^2 T,$$

de donde

$$T(t) = a_k e^{-\kappa \lambda_k^2 t}$$

La solución general de la ecuación diferencial con las condiciones de borde dadas es

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\kappa \lambda_k^2 t} \sin(\lambda_k x).$$

Los a_k están dados por las condiciones iniciales (CI), se obtienen de la misma manera que en el caso de la cuerda vibrante. Por lo tanto,

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\lambda_k x)\, dx.$$

III.3 Elementos de Cálculo Variacional

Muchos problemas ingenieriles están relacionados a problemas de optimización. Con el cálculo variacional estos problemas se pueden convertir en problemas diferenciales. Para motivar formularemos algunos ejemplos donde intervienen problemas de optimización.

Ejemplos

1.- Se quiere construir un tobogán que tiene una altura de a metros y una longitud horizontal de b metros. Para el diseño de dicho tobogán se supone que no existe fricción entre la superficie del tobogán y el objeto que se desliza. Además se pide que el tiempo de deslizamiento sea mínimo.
Para la solución del problema, podemos asociar la superficie deslizable al grafo de una función $y(x)$ con $y(0) = a$ y $y(b) = 0$, ver figura III.5. Por otro lado aplicando los principios y leyes de la física, se tiene que el objeto a deslizarse satisface

$$v^2(x) = 2g(a - y(x)),$$

donde v es la velocidad que tiene el objeto en el punto $(x, y(x))$.
Por otro lado, se tiene

$$v = \frac{ds}{dt},$$

donde s representa la longitud de la curva. Recordando cálculo I, sabemos que

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2},$$

de donde

$$\text{Tiempo} = \int_0^b \frac{dt}{dx} dt = \int_0^b \frac{{}^{ds}\!/_{dx}}{\frac{ds}{dt}}\, dx = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(a - y)}}\, dx.$$

Por consiguiente, el problema consiste en encontrar una función $y(x)$ con condiciones de borde $y(0) = a$ e $y(b) = 0$ tal que

$$\int_0^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{(a - y)}}\, dx \to \min .$$

2.- Sean $a < b$ $A > 0$ y $B > 0$, se busca una función $y(x)$ continuamente diferenciable con $y(a) = A$ y $y(b) = B$ tal que el área de la superficie de revolución generada por $y(x)$ sea minimal. Formulemos matemáticamente este problema. El área de la superficie de revolución generada por la curva $y(x)$ está dada por

$$\text{Area} = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}\, dx;$$

Por consiguiente el problema variacional consiste en encontrar una función $y(x)$ con $y(a) = A$ y $y(b) = B$, tal que

$$\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx \to \min .$$

En base a los dos ejemplos presentados, podemos enunciar la clase de problemas variacionales que resolveremos en este curso.

El problema, “Encontrar $y(x)$ con $y(a) = A$ y $y(b) = B$ tal que

$$\int_a^b L(x, y(x), y'(x))\, dx \tag{PV}$$

donde $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es continua, es un problema variacional. La función L se llama función de Lagrange o Lagrangiano.

El siguiente paso, es convertir el problema variacional en un problema diferencial, (estamos en el curso de Ecuaciones Diferenciales). Para tal efecto, suponemos que $y(x)$ es solución de (PV) y consideramos una función $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable con

$$h(a) = h(b) = 0,$$

Consideramos la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(\epsilon) = \int_a^b L(x, y(x) + \epsilon h(x), y'(x) + \epsilon h'(x))\, dx.$$

Se puede mostrar que g es una función diferenciable y sobre todo que g tiene un mínimo en $\epsilon = 0$. Por Cálculo I $g'(0) = 0$. Por otro lado, se tiene

$$g'(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial L(x, y(x), y'(x))}{\partial y} h(x) + \frac{\partial L(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} h'(x) \right) dx$$

Integrando por partes, el segundo término de la integral se tiene

$$g'(0) = \int_a^b \frac{\partial L(x, y(x), y'(x))}{\partial y} h(x)\, dx + \underbrace{\frac{\partial L(b, y(b), y'(b))}{\partial y'} h(b) - \frac{\partial L(a, y(a), y'(a))}{\partial y'} h(a)}_{=0}$$

$$- \int_a^b \left(\frac{\partial L(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} \right)' h(x)\, dx.$$

Por lo tanto

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L(x, y(x), y'(x))}{\partial y} h(x) - \left(\frac{\partial L(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} \right)' \right) dx = 0.$$

Esta ecuación es valida para cualquier función $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable, a condición que $h(a) = h(b) = 0$, lo que implica, (sin demostración),

$$\frac{\partial L(x, y(x), y'(x))}{\partial y} - \left(\frac{\partial L(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} \right)' = 0,$$

si $y(x)$ es solución de (PV). Hemos mostrado el teorema

Teorema III.3.1.- *Una condición necesaria para que $y(x)$ sea solución del problema variacional "Encontrar $y(x)$ con $y(a) = A$ e $y(b) = B$ tal que*

$$\int_a^b L(x, y(x), y'(x))\, dx;$$

es que $y(x)$ sea solución de la ecuación diferencial de Eular-Lagrange

$$\frac{\partial L(x, y, y')}{\partial y} h(x) - \left(\frac{\partial L(x, y, y')}{\partial y'} \right)' = 0. \tag{EL}$$

Desarrollando la ecuación de Euler-Lagrange, obtenemos la ecuación

$$L_y - L_{xy'} - L_{yy'} y' - L_{y'y'} y'' = 0 \tag{EL}$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden, donde L_y denota la derivada parcial de L respecto a y, etc.

Ahora bien, la ecuación (EL) puede ser simplificada, si se tiene información adicional respecto a L, por ejemplo:

1.- L no depende explícitamente de y, en este caso $L_y = 0$ y por lo tanto

$$L_{y'}(x, y') = C.$$

2.- L no depende explícitamente de y', en este caso $L'_y = 0$ de donde

$$L_y(x, y) = 0,$$

es una ecuación algebraica, caso no interesante y en general sin solución.

3.- L no depende explícitamente de x, obtenemos por consiguiente

$$L_y - L_{yy'}y' - L_{y'y'}y'' = 0,$$

multiplicamos por y',

$$y'L_y - (y')^2 L_{yy'} - y'y''L_{y'y'} = 0,$$

efectuando las agrupaciones y manipulaciones algebraicas, se tiene

$$(y'L_y + y''L'_y) - (y''L'_y + (y')^2 L_{yy'} + y'y''L_{y'y'}) = L' - (y'L'_y)' = 0,$$

de donde

$$L - y'L'_y = C. \tag{EL}$$

Remarca.- Una gran cantidad de problemas variacionales, presentan lagrangianos independientes de x, por lo que es conveniente memorizar la tercera versión de la ecuación (EL).

Resolvamos los ejemplos precedentes.

Ejemplos

3.- Encontrar $y(x)$ con $y(0) = a$ e $y(b) = 0$ tal que

$$\int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{a-y}}\, dx \to \min .$$

Aplicamos la ecuación de Euler-Lagrange para este problema, se obtiene

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{a-y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{(1+y'^2)(a-y)}} = C,$$

hacemos manipulaciones algebraícas y tenemos

$$\frac{1}{(1+y'^2)(a-y)} = C,$$

por lo tanto

$$(1+y'^2)(a-y) = C.$$

Para resolver esta ecuación de primer orden que no está dada de manera explícita, podemos despejar y' o bien parametrizar y, x respecto a θ donde θ es el ángulo de las tangentes de la curva. Se tiene $y' = \tan\theta$, de donde

$$\sec^2\theta(a-y) = C,$$

lo que da

$$y(\theta) = a + C\cos^2\theta.$$

Por otro lado,

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{y'} = \frac{-2C\cos\theta\sin\theta}{\tan\theta} = -2C\cos^2\theta,$$

integrando, obtenemos

$$x(\theta) = D - C(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta).$$

Planteando $\vartheta = 2\theta$, se tiene finalmente

$$x(\vartheta) = D - C(\vartheta + \sin\vartheta),$$
$$y(\vartheta) = a + C(1+\cos\vartheta),$$

El siguiente paso es determinar C y D. La condición $y = a$ cuando $x = 0$, la escribimos

$$\begin{aligned} x(\vartheta_0) &= D - C(\vartheta_0 + \sin\vartheta_0) = 0, \\ y(\vartheta_0) &= a + C(1 + \cos\vartheta_0) = a. \end{aligned}$$

La segunda ecuación es equivalente a escribir $C(1+\cos\vartheta_0) = 0$, como queremos soluciones no constantes, $\vartheta_0 = -\pi$ (la elección de $-\pi$ no es arbitraria, proviene del gráfico de la solución ver figura III.5. La primera ecuación dará $D = -\pi C$. Por consiguiente las parametrizaciones de la curva serán

$$\begin{aligned} x(\vartheta) &= -C(\pi + \vartheta + \sin\vartheta), \\ y(\vartheta) &= a + C(1 + \cos\vartheta), \end{aligned}$$

La condición $y = 0$, cuando $x = a$, le escribimos

$$\begin{aligned} x(\vartheta_f) &= -C(\pi + \vartheta_f + \sin\vartheta_f) = b, \\ y(\vartheta_f) &= a + C(1 + \cos\vartheta_f) = 0, \end{aligned}$$

Dividiendo estas dos últimas ecuaciones, se obtiene la condición para ϑ_f

$$\frac{\pi + \vartheta_f + \sin\vartheta_f}{1 + \cos\vartheta_f} = \frac{b}{a}.$$

Determinando ϑ_f se obtiene el valor de C. En la figura III.5 se observa la solución del problema con $a = 12$, $b = 15$.

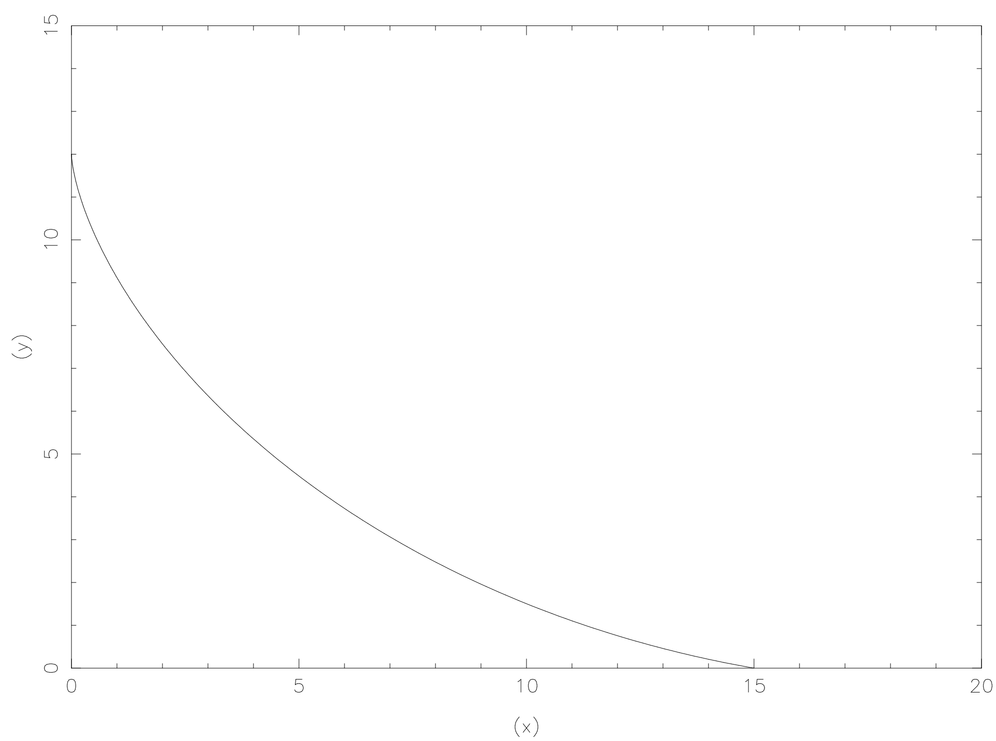


Figura III.5.- Trayectoria más rápida

Se podría explicitar la relación entre x e y, ver ejercicios. Es importante observar que las soluciones que encontremos serán validas mientras que $y(x) > 0$.

4.- Resolvamos el ejemplo 2, es decir: Encontrar $y(x) \geq 0$ con $y(a) = A > 0$ y $y(b) = B > 0$, tal que

$$\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx \to \min .$$

Deducimos las ecuaciones de Euler Lagrange para este problema, se obtiene

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C,$$

luego

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C.$$

Con el mismo razonamiento que el ejemplo 3, planteamos $y' = \tan\theta$, lo que da

$$\frac{y}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = C,$$

de donde

$$y = C\,|\sec\theta| .$$

Analizando el gráfico del problema, ver figura III.6, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Por otro lado,

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{C\sec\theta\tan\theta}{tan\theta} = C\sec\theta,$$

de donde

$$x = C\ln(\sec\theta + \tan\theta) + D.$$

El siguiente paso, es eliminar θ de x e y, se tiene:

$$\begin{aligned} x - D &= C\ln(y/C + \sqrt{(y/C)^2 - 1}), \\ e^{\frac{x-D}{C}} &= y/C + \sqrt{(y/C)^2 - 1}), \\ (y/C)^2 - 2(y/C)e^{\frac{x-D}{C}} + e^{2\frac{x-D}{C}} &= (y/C)^2 - 1, y = C\frac{e^{\frac{x-D}{C}} + e^{-\frac{x-D}{C}}}{2}, \\ y &= C\cosh(\frac{x-D}{C}). \end{aligned}$$

Los valores de C y D están determinados por las condiciones de borde; es decir:

$$\begin{aligned} C\cosh(\frac{a-D}{C}) &= A, \\ C\cosh(\frac{b-D}{C}) &= B. \end{aligned}$$

En la figura III.6 se tiene la solución del problema para $a = 0$, $b = 5$, $A = 5$ y $B = 5$.

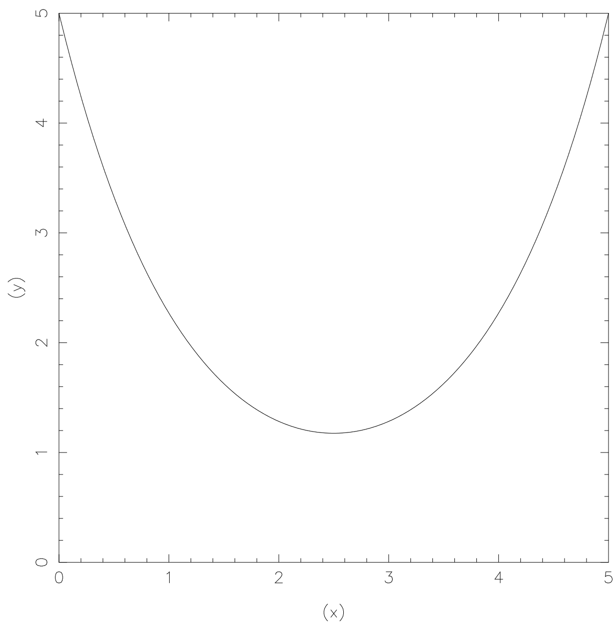


Figura III.6.- Curva generadora de superficie de área mínima

Problemas Isoperimétricos

Con frecuencia se debe resolver problemas de optimización en las que las soluciones deben satisfacer una condición adicional, como por ejemplo: que tenga cierta longitud dada de antemano, que el área de la superficie de revolución generada por la curva tenga cierto valor, etc.

Son problemas que pueden formularse como: "Encontrar una función $y(x)$ con $y(a) = A$ e $y(b)$ tal que

$$\int_a^b F(x, y, y')\, dx \to \min,$$
$$\int_a^b G(x, y, y')\, dx = 0,$$

donde F y G son funciones continuas. F será la función objetivo y G es una función restricción. Remarcamos que G no es identicamente nula, solamente la integral se anula. Utilizando la idea de los multiplicadores de Lagrange, visto en Cálculo II, el problema original se lo replantea, definiendo

$$L(x, y, y', \lambda) = F(x, y, y') - \lambda G(x, y, y')$$

y luego resolviendo: "Encontrar $y(x)$ diferenciable con $y(a) = A$ y $y(b) = B$ tal que

$$\int_a^b L(x, y, y', \lambda)\, dx \to \min\,.$$

Ejemplo

5.- Determinar la altura mínima que deben tener dos torres de alta tensión sabiendo que la distancia que separa las torres es $100\,m$, la longitud del cable es de $105m$ y que por cuestiones de seguridad el punto más bajo del tendido debe estar a $3\,m$ sobre la tierra.

Para resolver este problema, consideramos la familia de funciones $y(x)$ con $y(-50) = y(50) = 0$ cuya longitud es 105; esta restricción la escribimos como

$$\int_{-50}^{50} \left(\sqrt{1 + y'^2} - 1.05\right)\, dx = 0.$$

La forma del cable está sujeta al principio físico de menor energía; es decir un cuerpo alcanza su estado final cuando se encuentra en un nivel de mínima energía. Como la única energia que se puede considerar en este problema es la potencial, ésta es igual a

$$\mathrm{E_P} = \mu \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

donde μ es la densidad lineal del cable. Por consiguiente el problema consistirá en encontrar una función $y(x)$ con $y(-50) = y(50) = 0$ tal que

$$\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx \to \min,$$
$$\int_{-50}^{50} \left(\sqrt{1+y'^2} - 1.05\right)\,dx = 0;$$

de donde la función a aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange es

$$L(x,y,y',\lambda) = y\sqrt{1+y'^2} - \lambda\left(\sqrt{1+y'^2} - 1.05\right).$$

Como L no depende de x, aplicamos Euler-Lagrange en su variante respectiva

$$\left(\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - \lambda\frac{y'2}{\sqrt{1+y'^2}}\right) - \left(y\sqrt{1+y'^2} - \lambda\left(\sqrt{1+y'^2} - 1.05\right)\right) = c.$$

Realizamos las simplificaciones algebraícas que corresponden y se obtiene

$$\frac{-y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = c,$$

planteamos $y' = \tan\theta$, de donde

$$y(\theta) = \lambda + c\sec\theta.$$

Por otro lado

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{c\sec\theta\,\tan\theta}{\tan\theta} = c\sec\theta,$$

por lo tanto

$$x(\theta) = c\ln(\sec\theta + \tan\theta) + d,$$

por simetría del problema deducimos que $d = 0$. El siguiente paso es expresar y en función de x, se tiene:

$$e^{x/c} = \sec\theta + \tan\theta, (e^{x/c} - \sec\theta)^2 = \tan^2\theta = sec^2\theta - 1,$$
$$e^{2x/c} - 2e^{x/c}\sec\theta = -1,$$
$$\sec\theta = \frac{e^{x/c} + e^{-x/c}}{2} = \cosh(x/c),$$

de donde

$$y(x) = \lambda + c\cosh(x/c).$$

La condición de borde $y(50) = 0$, da $\lambda + c\cosh(50/c) = 0$. La longitud del cable se traduce

$$\int_{-50}^{50} \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_{-50}^{50} \sec\theta\,dx = \int_{-50}^{50} \cosh(x/c)\,dx = 2c\sinh(50/c) = 105.$$

De la úlima ecuación obtenemos el valor de $c = 91.96$ y la otra condición da $\lambda = -105$.

Tenemos $y(0) = -13.$, de donde la altura de las torres respetando los tres metros reglamentarios, debe ser por lo menos $16\,m$. En la figura III.7 se observa la forma que adquiere el cable.

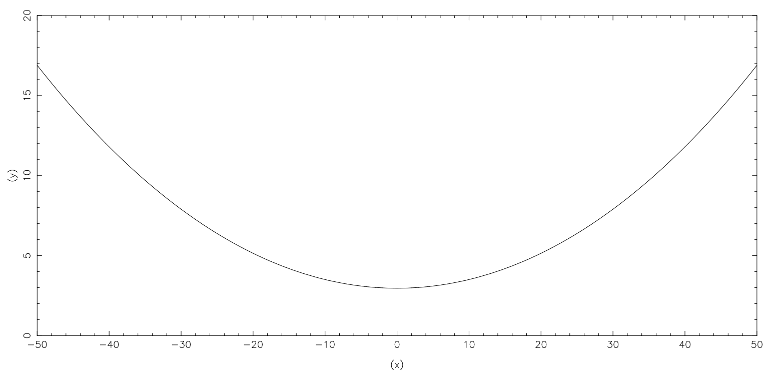


Figura III.7.- Cable entre dos torres

Problemas Variacionales a Varias Variables

Los problemas variacionales vistos más arriba se referían a encontrar una función y que depende de una sola variable x. Ahora bien, existe una cantidad de problemas donde las funciones incognitas tienen varias componentes y dependen de una sola variable independiente, que en general es el tiempo t.

Los problemas variacionales que estudiaremos en lo que sigue, conciernen a curvas, es decir: "encontrar una aplicación $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ $(\gamma(t) = x(t))$ con $x(a) = A \in \mathbb{R}^n$ y $x(b) = B \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\int_a^b L(t, x, \dot{x})\, dt \to \min,$$

con $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable."

De la misma manera con se procedio en el caso de una sola variable, se plantea

$$g(\epsilon) = \int_a^b L(t, x(t) + \epsilon h(t), \dot{x} + \epsilon \dot{h}(t)),$$

donde $x(t)$ es supuesta la solución del problema y $h(t)$ continuamente diferencible que satisface $h(a) = 0 = h(b)$. Se tiene que g tiene un mínimo en $\epsilon = 0$, de donde $g'(0) = 0$. Finalmente obtenemos las fórmulas de Euler-Lagrange, dejando el detalle de la determinación al estudiante,

$$\begin{aligned} \frac{dL_{\dot{x}_1}}{dt} - L_{x_1} &= 0, \\ \frac{dL_{\dot{x}_2}}{dt} - L_{x_2} &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{dL_{\dot{x}_n}}{dt} - L_{x_n} &= 0, \end{aligned}$$

sistema diferencial de orden 2 y talla n.

Remarcas.-

1.- En el caso en que $n > 1$ no se puede simplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange de la misma manera que se hizo más arriba.

2.- Para los problemas isoparamétricos, la utilización de los multiplicadores de Lagrange es válida como antes.

Ejemplos

6.- Determinar la curva de longitud mínima que une dos puntos A y B del espacio. Por consiguiente, el problema es determinar la curva $(x(t), y(t), z(t))$, $0 \leq t \leq 1$ con $(x(0), y(0), z(0)) = A$ y $(x(1), y(1), z(1)) = B$ tal que

$$\int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt.$$

$L(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{y}^2}$, como no depende ni de x, ni de y, ni de z, se tiene $L_x = 0$, $L_y = 0$ y $L_z = 0$ por lo que $L_{\dot{x}} = c_1$, $L_{\dot{y}} = c_2$, $L_{\dot{z}} = c_3$, es decir

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} &= c_1, \\ \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} &= c_1, \\ \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} &= c_1. \end{aligned}$$

Sin perder generalidad, podemos suponer que $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ es constante, ya que para toda curva existe una parametrización de tales características. Por consiguiente

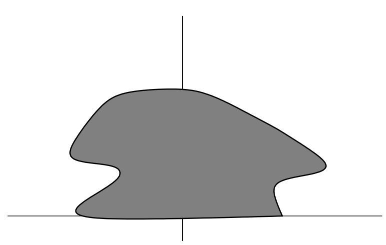
$$\begin{aligned} \dot{x} &= c_1 \\ \dot{y} &= c_2 \\ \dot{z} &= c_3 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema, se obtiene

$$\begin{aligned} x &= c_1 t + d_1 \\ y &= c_2 t + d_2 \\ z &= c_3 t + d_3 \end{aligned}$$

que es la parametrización de una recta, los valores de c_i y d_i están determinados por A y B.

7.- Determinar la curva que está por encima del eje x, que une los punto $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ de manera que el area limitada por la curva y el eje x sea A y la longitud de la curva sea mínima.



Por consiguiente tenemos un problema isoperimétrico. La fórmula de Green permite evaluar el área encerrada por la curva. Para tal efecto, el sentido de la curva debe ser contrario a las manecillas del reloj, por lo que debemos encontrar una curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ con $\gamma(0) = (1, 0)$ y $\gamma(1) = (0, 1)$. El area de la región achurada será por lo tanto

$$Area = \int_\gamma \frac{1}{2} y\, dx - \frac{1}{2} x\, dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(y\dot{x} - x\dot{y})\, dt.$$

La longitud de la curva está dada por

$$\int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

De donde el problema a resolver, será

$$\int_0^1 \left(\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} - \lambda(y\dot{x} - x\dot{y})\right)\, dt.$$

Aplicando las ecuaciones de Euler Lagrange, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} - \lambda y\right)/dt &= \lambda\dot{y}, \\ d\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} + \lambda x\right)/dt &= -\lambda\dot{x}, \end{aligned}$$

Como en el ejemplo precedente, suponemos que $\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = c$, de donde

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{x}}{c} &= 2\lambda\dot{y} \\ \frac{\ddot{y}}{c} &= -2\lambda\dot{x} \end{aligned}$$

La constante c la incorporamos al lado derecho de cada una de las ecuaciones, obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{d(\dot{x} - cy)}{dt} &= 0, \\ \frac{d(\dot{y} + cx)}{dt} &= 0, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \dot{x} &= cy + d_1 \\ \dot{y} &= -cx + d_2 \end{aligned}$$

La trayectoria de esta ecuación diferencial es una circunferencia, la verificación la dejamos como ejercicio. Por lo tanto la curva que une los dos puntos es un arco de circunferencia. La determinación de dicha circunferencia es un simple ejercicio de geometría.

Problemas Geodésicos

Más arriba hemos abordado problemas variacionales en las que las funciones a encontrar no tenían restricción alguna, o se conocia algún valor de ésta determinada por medio de una integral. Ahora bien, en algunas situaciones es necesario que las curvas se encuentren dentro un conjunto dado como ser una superficie.

La formulación de este tipo de problemas está dada por, encontrar una función $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ con $\gamma(0) = A$ y $\gamma(0) = B$ tal que

$$\begin{aligned} &\int_0^1 F(t, x, \dot{x})\, dt \to \min \\ &\qquad x \in M \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

M es en general una superficie si $n = 3$.

Por consiguiente, nos limitaremos al caso en que $M = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$, donde $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable. Utilizando multiplicadores de Lagrange, el problema se convierte en: “Encontrar $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ con $x(0) = A$ y $x(1) = B$ tal que

$$\int_0^1 (F(t, x, \dot{x}) - \lambda(x)g(x))\, dt \to \min$$

remarcando que λ depende de x”.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{dF_{\dot{x}_1}}{dt} - (F_{x_1} - \lambda(x)g_{x_1}) &= 0 \\
\frac{dF_{\dot{x}_2}}{dt} - (F_{x_2} - \lambda(x)g_{x_2}) &= 0 \\
&\vdots \\
\frac{dF_{\dot{x}_n}}{dt} - (F_{x_n} - \lambda(x)g_{x_n}) &= 0
\end{aligned}$$

Ahora bien, en los problemas usuales F depende solamente de $\dot{x}$, por lo que las ecuaciones con esta supoción son iguales a:

$$\begin{aligned}
\frac{dF_{\dot{x}_1}}{dt} + \lambda(x)g_{x_1} &= 0 \\
\frac{dF_{\dot{x}_2}}{dt} + \lambda(x)g_{x_2} &= 0 \\
&\vdots \\
\frac{dF_{\dot{x}_n}}{dt} + \lambda(x)g_{x_n} &= 0.
\end{aligned}$$

Volvamos a nuestro problema de geodésicas.

Definición III.3.2.- Sea $M \subset \mathbb{R}$ un conjunto (superficie), $A, B \in M$. Una geodésica en M que une A y B es una curva en M que une A y B de longitud minimal.

En el caso de las geodésicas, se tiene

$$F(\dot{x}) = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \cdots + \dot{x}_n^2}.$$

Ahora bien, podemos elegir una parametrización de manera que $\sqrt{\dot{x}_1^2 + \cdots + \dot{x}_n^2}$ sea constante, por lo que las ecuaciones de Euler-Lagrange darán

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= \lambda(x)g_{x_1}, \\
&\vdots \\
\ddot{x}_n &= \lambda(x)g_{x_n},
\end{aligned}$$

Por lo tanto, deducimos que $\ddot{x}$ y $\operatorname{grad} g$ son linealmente dependientes en todo $x \in M$.

Ejemplo

8.- Determinemos las geodésicas de una circunferencia. Sin perder generalidad podemos suponer que la esfera está centrada en el origen. Por lo tanto

$$g(x, y, z) - R^2 = 0.$$

Ahora bien por lo hecho anteriormente $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ y $\operatorname{grad} g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ son linealmente independientes y esto sucede si y solamente si

$$(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) \times \operatorname{grad} g(x, y, z) = 0.$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
\ddot{y}z - \ddot{z}y &= 0, \\
\ddot{x}z - \ddot{z}x &= 0, \\
\ddot{y}x - \ddot{x}y &= 0.
\end{aligned}$$

Luego se tiene

$$\ddot{y}z - \ddot{z}y = 0 = (\dot{y}z - y\dot{z})^{\cdot},$$
$$\ddot{x}z - \ddot{z}x = 0 = (\dot{x}z - x\dot{z})^{\cdot},$$
$$\ddot{x}z - \ddot{x}y = 0 = (\dot{y}x - y\dot{x})^{\cdot};$$

de donde

$$\dot{y}z - y\dot{z} = c_1$$
$$\dot{x}z - x\dot{z} = c_2$$
$$\dot{y}x - y\dot{x} = c_3$$

Multiplicando la primera ecuación por x, la segunda por $-y$, la tercera por $-z$, luego adicionando se tiene

$$c_1x - c_2y + c_3z = 0.$$

Por lo tanto, las geodésicas son las intercciones de la esfera con planos que pasan por el origen.

III.4 Ejercicios

1.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:
a) $x\,dx + y\,dy = 0$;
b) $x\,dx - y\,dy = 0$;
c) $y\,dx + x\,dy = 0$;
d) $y\,dx - x\,dy = 0$;
e) $x\,dy - y\,dx - (1 - x^2)\,dx = 0$;
f) $(x^2 - y)\,dx - x\,dy = 0$;
g) $y(x - 2y)\,dx - x^2\,dy = 0$;
h) $(x + y\cos x)\,dx + \sin y\,dy = 0$.

2.- Resolver

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{(x+y)^2} + dy = dx$$

utilizando factor integrante y luego mediante manipulaciones con los diferenciales.

3.- Resolver

$$\frac{4y^2 - 2x^2}{4xy^2 - x^3}\,dx + \frac{8y^2 - x^2}{4y^3 - x^2y}\,dy = 0$$

utilizando si es necesario un factor integrante y luego resolviendo como una ecuación diferencial ordinaria.

4.- Consideremos la ecuación diferencial

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0.$$

Probar que si $(M_y - N_x)/(Ny - Mx)$ es una función $g(z)$ donde $z = xy$, entonces

$$\mu = e^{G(z)}$$

es un factor integrante, donde $G'(z) = g(z)$.
b) ¿Qué forma tendra el factor integrante μ si $z = x + y$.

5.- Resolver las siguientes ecuaciones:
a) $(y\ln y - 2xy)\,dx + (x + y)\,dx = 0$;
b) $e^x\,dx + (e^x\cot y + 2y\csc y)\,dx = 0$;

c) $x\,dy + x\,dx = \sqrt{xy}\,dy$.

6.- Resolver las siguientes ecuaciones con derivadas parciales de primer orden:
a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2$ con $u(x,0) = \sin x$;
b) $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = u^2$ con $u(x,0) = e^x$;
c) $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ con $u(0,y) = y$.
d) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 1 + u^2$ con $u(x,0) = 1$.

7.- Resolver la ecuación de la cuerda vibrante cuya ecuación es $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ con condiciones de frontera dadas por: $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ y condiciones iniciales dadas por:
$u(x,0) = \sin x + 3\sin 3x$
$\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,0) = 0$

8.- Resolver la ecuación de difusión cuya ecuación es $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ con condiciones de frontera dadas por: $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ y condiciones iniciales dadas por:
$u(x,0) = \sin 2x + 3\sin 5x$

9.- Resolver la ecuación de la membrana cuadrada cuya ecuación es $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ con condiciones de frontera dadas por: $u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0$ y condiciones iniciales dadas por:
$u(x,y,0) = \sin 2x \sin y + 3\sin 4x \sin 3y$
$\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y,0) = 0$

10.- Resolver la ecuación de difusión cuya ecuación es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u,$$

con condiciones de frontera dadas por

$$u = 0 \quad \text{sobre los bordes del cuadradado de lado } \pi.$$

Condiciones iniciales dadas por:

$$u(x,y,0) = \sin x \sin y + \sin 2x \sin 3y.$$

11.- Resolver la ecuación de difusión cuya ecuación es $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ con condiciones de frontera dadas por: $u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 100$ y condiciones iniciales dadas por:
$u(x,0) = 0$

12.- Hallar la curva con $y(-1) = y(1) = 1$ que genera una superficie de revolución de área minimal.
b) Sabiendo que el área de la superficie es minimal y el volumen es igual a 4.

13.- Hallar la ecuación que describe una cuerda de longitud 3 sometida a la acción de la gravedad, sabiendo que sus extremidades tienen las coordenadas $(-1,0)$ y $(1,0)$.

14.- Mostrar que la curva que une dos puntos del plano, es un segmento de recta.

15.- Determinar las funciones extremales siguientes:
a) $\Phi_1(y) = \int_{-1}^{1} \sqrt{y(1+y'^2)}\,dx$, con $y(-1) = y(1) = b > 0$;
b) $\Phi_2(y) = \int_a^b \frac{1+y^2}{y'2}\,dx$ con $y(a) = A$, $y(b) = B$;

c) $\Phi_3(y) = \int_a^b (x-y)^2\,dx$ con $y(a) = A$ y $y(b) = B$;
d) $\Phi_4(y) = \int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx$ con $y(a) = A$ y $y(b) = B$;
e) $\Phi_5(y) = \int_a^b \sqrt{x(1+y'^2}\,dx$ con $y(0) = A$ y $y(b) = B$, $b > 0$.

16.- Si P y Q son dos puntos de un plano, la longitud de una curva que los une es, en coordenadas polares,

$$\int_P^Q \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

Hallar la ecuación polar de una recta haciendo que esta integral sea mínima.
a) con θ como variable independiente;
b) con r como la variable independiente.